Orgaan van de

Nederlandse Vereniging

van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 74

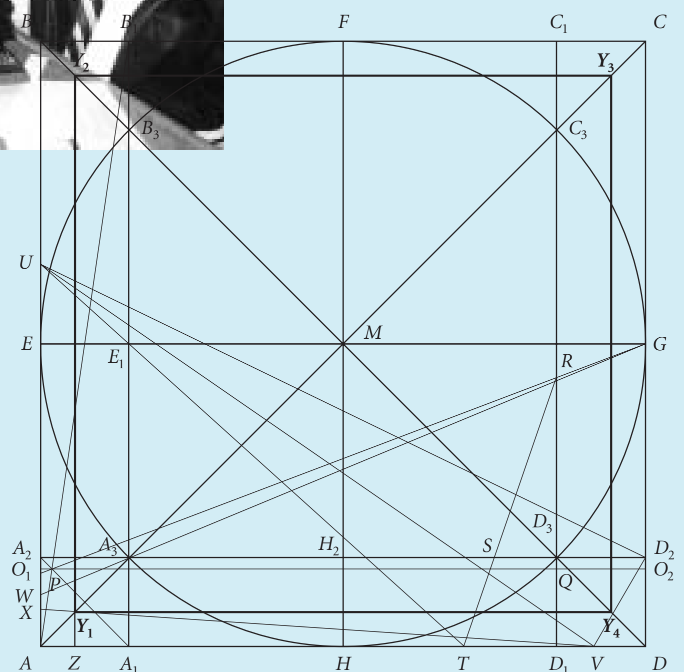
1998-1999 januari

4









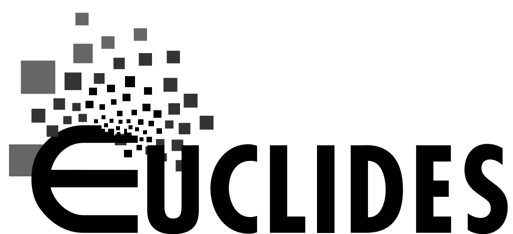
Kwadratuur Cirkel

Benaderd

Nimspel

Wiskunde in

Zuid-Afrika



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Redactie

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem
e-mail: cph@xs4all.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.
  Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:

- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.euronet.nl/~nvvw

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: mkommer@knoware.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8
8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:
113015.261@compuserve.com
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: NVvW@euronet.nl

Contributie per ver. jaar: *ƒ* 80,00
Studentleden: *ƒ* 40,00
Leden van de VVWL: *ƒ* 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: *ƒ* 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer. Abonnementsprijs voor personen: *ƒ* 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: *ƒ* 240,00 per jaar. Betaling geschiedt per acceptgiro. Losse nummers op aanvraag leverbaar voor *ƒ* 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891
e-mail lbozuwa@worldonline.nl

Adresgegevens auteurs

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

L. van den Broek
Graafseweg 387
6832 ZN Nijmegen

F.J. Dijksterhuis
Antaresstraat 63
7521 ZL Enschede

W. Doeve
Paardendreef 69
8391 BC Noordwolde (Fr.)

J.G.A. Haubrich
Aeneaslaan 21
5631 LA Eindhoven

P.L.M. Hustinx
Senecalaan 125
5216 CH 's-Hertogenbosch

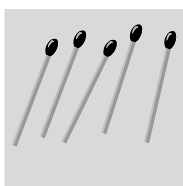
S. Oortwijn
Graafseweg 387
6832 ZN Nijmegen

V.E. Schmidt
Verlengde Grachtstraat 43
9717 GE Groningen

L. Vercoutter
Kalfvaart 5
B-8900 Ieper
België

H. Verhage
Freudenthal Instituut
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht

Inhoud


117


122


128

van de redactietafel

Als u dit nummer leest is de kerstvakantie alweer achter de rug. Dat geeft mij de gelegenheid u allen, namens de redactie, veel sterkte en veerkracht te wensen in het nieuwe jaar.
In dit jaar zullen alle scholen starten met de vernieuwde Tweede Fase, zowel op havo als op vwo. Voorwaar geen sinecure, zoals inmiddels is gebleken op de scholen die in 1998 gestart zijn.
Ook rond de veranderingen in vbo/mavo in de richting van het vmbo zal dit jaar veel meer duidelijk worden.
De redactie zal proberen u steeds zo goed mogelijk op de hoogte te houden van de ontwikkelingen. U mag daar overigens zelf ook een bijdrage aan leveren.

Tweede Fase

De afgelopen twee maanden hebben in het teken gestaan van aanpassing van een aantal regelingen rond de Tweede fase. Deze aanpassing had voornamelijk als doel de scholen meer vrijheden te geven om de Tweede Fase naar hun eigen visie in te richten en mogelijke verlichting te zoeken van geconstateerde overladenheid.
Een nota van het Ministerie daaromtrent is eind november naar de Tweede Kamer gezonden. In deze nota werd voor een aantal vakken tevens gezocht naar een inhoudelijke verlichting.
Op 3 december 1998 is de betreffende concept-nota met de voorgestelde aanpassingen besproken in de Tweede Kamer. In de bestuurstafel verderop in dit nummer vindt u daarover meer informatie.
Bij de kamerbespreking zijn er voor wiskunde nog (terug)wijzigingen aangebracht.
De stand van zaken is nu:
* Havo wiskunde A:
CEVO kan domeinen of subdomeinen aanwijzen die niet getoetst worden op het centraal examen.
* Havo wiskunde B:
CEVO kan domeinen of subdomeinen aanwijzen die niet getoetst worden op het centraal examen.
* Vwo wiskunde A:
CEVO kan domeinen of subdomeinen aanwijzen die niet getoetst worden op het centraal examen.
* Vwo wiskunde B:
Hiervoor is de regeling definitief geworden, zoals die in het vorige nummer van Euclides gepubliceerd is.
Aan deze ijskast bij vwo wiskunde B is vooralsnog geen eindtijd verbonden. In de praktijk betekent dat ten minste drie jaar.

Overige maatregelen betreffen vooral mogelijkheden om het vrije deel veel flexibeler in te zetten voor allerlei activiteiten. Hetgeen daarvan het meest in het oog springt is dat de studielast benodigd voor het profielwerkstuk uit dit vrije deel mag komen.
Ook wordt de suggestie gedaan om bij praktische opdrachten samen te werken tussen de vakken, zodat één praktische opdracht voor meerdere vakken kan tellen.
Voor scholen die in 1998 gestart zijn, betekenen deze maatregelen dat ze een aantal reeds georganiseerde zaken weer nader moeten overdenken en/of wijzigen. Hopelijk leiden de wijzigingen echter tot daadwerkelijke verlichting.
Scholen die in 1999 starten kunnen deze mogelijkheden nog meenemen bij de definitieve inrichting.

Ten slotte

Bij veranderingen in het wiskundeonderwijs moeten weer nieuwe routines en nieuwe (examen)tradities worden opgebouwd.
De meest effectieve manier daarvoor is collegiale uitwisseling. Deze uitwisseling kan plaats vinden op bijeenkomsten, bij scholingen, op studiedagen en via de vakbladen.
Vooral bij dit laatste kan de redactie van Euclides een rol spelen. Wij zijn voortdurend op zoek naar docenten die bereid zijn hun ervaringen via een aardig artikeltje verder te verspreiden.
De redactie helpt u graag op weg.

Kees Hoogland

De Kwadratuur van de Cirkel Benaderd

W.L.J. Doeve en P.L.M. Hustinx

Inleiding

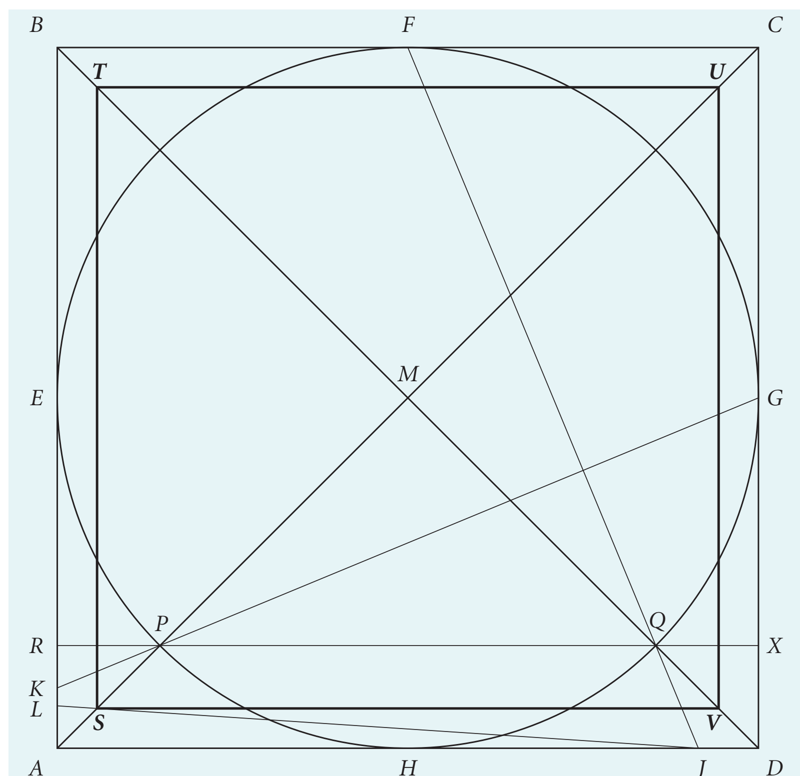
Het is bekend dat de kwadratuur van de cirkel, *de elementaire constructie* met passer en liniaal van een vierkant met een oppervlakte gelijk aan de oppervlakte van een gegeven cirkel, niet mogelijk is. Bij een cirkel met straal 1 zou het te construeren vierkant een oppervlakte van π hebben. De kwestie komt dus neer op de *constructie van een lijnstuk met een lengte van* $\sqrt{\pi}$. Dat een dergelijke constructie onmogelijk is, vloeit voort uit de transcendente aard van het getal π. Doeve (1999) gaat nader in op het begrip elementaire constructie en de betekenis van de transcendente aard van π. Wij veronderstellen een en ander hier bekend.

Dit alles neemt echter niet weg, dat het mogelijk is te zoeken naar elementaire constructies van een vierkant waarvan de oppervlakte π benadert. In een artikel in Euclides van alweer ruim tien jaar geleden beschreef Hustinx (1988) bijvoorbeeld een constructie die resulteerde in een vierkant met een oppervlakte φ van $(18\,632 - 11\,040\sqrt{2})\,/\,961$. Afgerond op 9 decimalen is die oppervlakte 3,141 604 861, terwijl π in 9 decimalen 3,141 592 654 bedraagt.

Als maat voor de benadering van de kwadratuur van een cirkel met straal 1 definiëren we de absolute afwijking als $(\omega - \pi)$ en de relatieve afwijking als $(\omega - \pi)/\pi$, waarin ω de oppervlakte van het geconstrueerde vierkant voorstelt. Daarmee bewerkstelligen we dat een positieve (relatieve) afwijking overeenkomt met een benaderende kwadratuur die de werkelijke oppervlakte van de cirkel (π) overschrijdt, terwijl een negatieve (relatieve) afwijking duidt op een geconstrueerd vierkant met een oppervlakte kleiner dan π.

Op basis van deze definitie bleek het door Hustinx (1988) geconstrueerde vierkant een afwijking $(\varphi - \pi)$ te hebben van $+1{,}2 \times 10^{-5}$ en een relatieve afwijking $(\varphi - \pi)/\pi$ van $+3{,}9 \times 10^{-6}$, ofwel van minder dan +0,0004%.

Bij de gelegenheid van de publicatie van dat artikel nodigde de redactie van Euclides een ieder uit om het gevonden resultaat qua nauwkeurigheid te overtreffen. Wij hebben deze handschoen opgepakt, en zullen het nu inmiddels ruim tien jaar oude resultaat op twee wijzen verbeteren.



figuur 1 Benadering van de Kwadratuur van de Cirkel (relatieve afwijking: $+3{,}9 \times 10^{-6}$)

Eerst presenteren wij een *eenvoudiger* constructie die resulteert in een benadering met een even grote nauwkeurigheid. Vervolgens presenteren wij een constructie

die, hoewel aanzienlijk ingewikkelder, de beide eerdere in *nauwkeurigheid* verre overtreft.

Een eenvoudiger constructie

Construeer een cirkel met middelpunt M en straal 1. Construeer omgeschreven vierkant $ABCD$ met diagonalen AC en BD. De raakpunten aan de cirkel noemen we respectievelijk E, F, G en H. Zie figuur 1. Lijnstuk MA snijdt de cirkel in punt P en lijnstuk MD snijdt de cirkel in punt Q. De lijn door P en Q snijdt AB in punt R en CD in punt X. De lijn door G en P snijdt AB in punt K en de lijn door F en Q snijdt AD in punt J.
Construeer nu punt L op AB zo dat $AL = RK$. Construeer daartoe bijvoorbeeld een punt N (niet in figuur 1 aangegeven) op lijnstuk AR zo dat $NR = NA$ en vervolgens een cirkel (evenmin in figuur 1 aangegeven) met N als middelpunt en NK als straal. Het snijpunt van de lijnstukken JL en AC duiden we aan met S. De lijn door S evenwijdig met AB snijdt BD in punt T.

Het vierkant $STUV$ met de overige twee hoekpunten U en V op respectievelijk MC en MD heeft oppervlakte $\chi = (18632 - 11040\sqrt{2})/961$. Het is identiek aan het vierkant geconstrueerd door Hustinx (1988).

Vergelijking

We vergelijken de hierboven beschreven constructie met die van Hustinx (1988).

Ten opzichte van onze constructie gebruikt Hustinx (1988) nog hulplijnen door F en H en door E en G; een punt W (niet in figuur 1 aangegeven) op deze laatste hulplijn door E en G zo dat $EW = 3WG$ (ofwel, omdat punt M ook op deze hulplijn ligt, zo dat $MW = WG$); een hulplijn door W en P; en een hulplijn loodrecht op EG door het punt W. Deze laatste loodlijn is overbodig. (Let op: Bij deze beschrijving van de constructie in Hustinx (1988) hanteren wij de symbolen gebruikt in *onze* figuur 1, hierboven. Deze symbolen komen niet overeen met die welke worden gebruikt in Hustinx (1988).)

Anders dan in Hustinx (1988) gebruiken wij bij onze constructie daarentegen een hulplijn door G en P en een cirkel (niet in figuur 1 aangegeven) met het midden van lijnstuk AR als middelpunt en door punt K.

Daarmee is onze constructie eenvoudiger. Naar ons oordeel is bovendien de resulterende constructietekening eleganter.

Tot slot, de berekeningen in Hustinx (1988) lijken korter dan de onze die hieronder volgen, maar dat is slechts schijn. Met het oog op een goed begrip, ook van onze tweede complexere constructie hierna, zijn wij in bewijsvoering en rekenwerk aanzienlijk explicieter dan Hustinx (1988).

Berekeningen

Het is eenvoudig in te zien dat lijnstukken als AE, AB, RE en AR lengtes hebben van respectievelijk 1, 2, $1/\sqrt{2}$ $(= \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dergelijke bekende lengtes zullen we in de berekeningen bij beide constructies hierna zonder verdere uitleg veelvuldig gebruiken. Gelijkvormigheid en de stelling van Pythagoras zijn bij dergelijke berekeningen twee basisconcepten.

We bepalen eerst de lengte van lijnstuk LA en van lijnstuk JA. We gebruiken $GX = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $XP = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $RP = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Omdat $\Delta GXP \sim \Delta KRP$ geldt $KR = GX \cdot RP/XP$. Dus $KR = [(\frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})]/(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) = (\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}) / (1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

We verdrijven de wortel uit de noemer door vermenigvuldiging van teller en noemer met een factor $(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Dit is een algebraïsche standaardprocedure, gebruik makend van de gelijkheid $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, die we hierna zonder verdere toelichting nog vaak zullen toepassen. We vinden $KR = (\frac{3}{4}\sqrt{2} - 1)/\frac{1}{2}$. Verdrijven van de breuk in de noemer, iets dat we in voorkomende gevallen in het vervolg ook als regel zullen doen, resulteert dan in $KR = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2$ en uit de constructie volgt dat $LA = KR$.

Ook volgt uit de constructie dat $JH = KE = KR + RE = (1\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2) + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2$. Bovendien geldt $JA = JH + HA$; omdat $HA = 1$ vinden we $JA = 2\sqrt{2} - 1$.

Vervolgens bepalen we de lengte van lijnstuk TS. Punt Y zij het snijpunt van de lijn door T en S met AD. Nu volgt uit de constructie dat $SY // CD$ en dus dat $\Delta ASY \sim \Delta ACD$. AC is een diagonaal in vierkant $ABCD$. Dus $AY = SY$.

Omdat $\Delta JYS \sim \Delta JAL$ geldt dat $SY / LA = JY / JA$ en dus dat $SY / LA = (JA - AY) / JA$. Substitutie van SY voor AY levert $SY / LA = (JA - SY) / JA$. Hieruit volgt dat $SY = LA \cdot JA / (LA + JA)$.

Substitutie van de inmiddels bekende getalwaarden geeft $SY = (1\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2) \cdot (2\sqrt{2} - 1) / [(1\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2) +$

$(2\sqrt{2} - 1)] = (8 - 5\frac{1}{2}\sqrt{2}) / (3\frac{1}{2}\sqrt{2} - 3)$. We verdrijven de wortel uit de noemer en vinden
$SY = (11\frac{1}{2}\sqrt{2} - 14\frac{1}{2}) / 15\frac{1}{2} = (23\sqrt{2} - 29) / 31$.
Uit de constructie volgt tenslotte dat $TS = AB - 2SY$ waarin $AB = 2$. We vinden dus
$TS = 2 - 2 \cdot (23\sqrt{2} - 29) / 31 = (120 - 46\sqrt{2}) / 31$.

De oppervlakte χ van vierkant *STUV* is gelijk aan $TS^2 = (18632 - 11040\sqrt{2}) / 961$, een resultaat gelijk aan oppervlakte φ gevonden door Hustinx (1988).

Een nauwkeuriger constructie

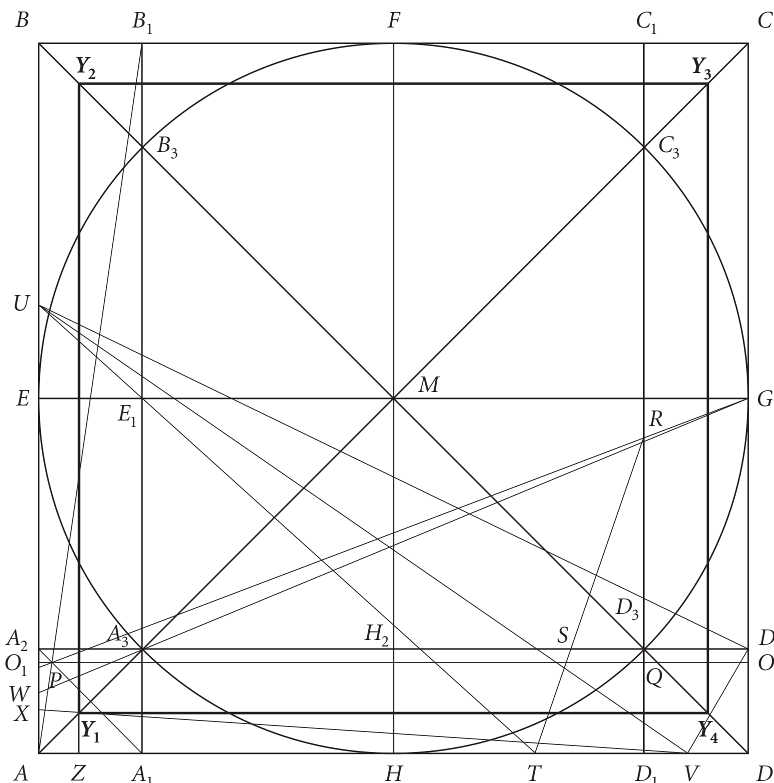
Construeer opnieuw een cirkel met middelpunt *M* en straal 1 en omgeschreven vierkant *ABCD* met diagonalen *AC* en *BD*. De raakpunten van dit vierkant aan de cirkel noemen we respectievelijk *E*, *F*, *G* en *H*. Teken ook de lijnstukken *EG* en *FH*. Zie figuur 2. Let op: De gebruikte symbolen in deze figuur wijken ten dele af van die in figuur 1. We zetten de constructie nu als volgt voort.

We tekenen een hulplijn door de punten A_1 en A_2 en een hulplijn door de punten *A* en B_1. Het snijpunt beider hulplijnen noemen we *P*. We tekenen vervolgens een hulplijn door de punten *P* en *G*. Het snijpunt van deze hulplijn met de lijn door de punten C_1 en D_1 noemen we *R*.

Het snijpunt van lijnstuk *FH* met lijnstuk A_2D_2 noemen we H_2. Construeer nu het punt *S* op lijnstuk H_2D_2 zo dat $H_2S = SD_2$. Teken een hulplijn door de punten *R* en *S*. Deze hulplijn snijdt lijnstuk *AD* in punt *T*.

Het snijpunt van lijnstuk *EG* met lijnstuk A_1B_1 noemen we E_1. We tekenen vervolgens weer een hulplijn, nu door de punten *T* en E_1. Deze hulplijn snijdt *AB* in het punt *U*. We construeren vervolgens met de passer het punt *V* op lijnstuk *AD* zo dat $UV = UD_2$.

Het snijpunt van de lijn door de punten *G* en A_3 met lijnstuk *AB* noemen we *W*. We construeren vervolgens punt *X* op *AB* zo dat $AX = A_2W$ (analoog aan de constructie van punt *L* in figuur 1).



figuur 2 Benadering van de Kwadratuur van de Cirkel
(relatieve afwijking: $-9{,}2 \times 10^{-9}$)

Tenslotte tekenen we een hulplijn door de punten *X* en *V*. Het snijpunt van de lijnstukken *XV* en *AC* noemen we Y_1. De lijn door het punt Y_1 evenwijdig met lijnstuk *AB* snijdt *BD* in het punt Y_2. We construeren nu het vierkant $Y_1Y_2Y_3Y_4$ met de overige twee hoekpunten Y_3 en Y_4 op respectievelijk *MC* en *MD*.

De constructie van dit vierkant is een benadering van de kwadratuur van de cirkel. Vierkant $Y_1Y_2Y_3Y_4$ heeft oppervlakte
$\psi = \{[\sqrt{(2043583397 - 1445016731\sqrt{2})} + 12248\sqrt{2} - 1527] / 8993\}^2$.

Benaderen we ψ als decimale breuk afgerond op 15 decimalen, dan vinden we $\psi \approx 3{,}141592624801543$. De werkelijke waarde van de oppervlakte van de cirkel (π) in 15 decimalen nauwkeurig is, als bekend, 3,141592653589793. De afwijking $(\psi - \pi)$ bedraagt $-2{,}9 \times 10^{-8}$. Het geconstrueerde vierkant heeft een relatieve afwijking $(\psi - \pi) / \pi$ van $-9{,}2 \times 10^{-9}$, ofwel van minder dan $-0{,}000001\%$.

Noem de vier snijpunten van lijnstukken *MA*, *MB*, *MC* en *MD* met de cirkel respectievelijk A_3, B_3, C_3 en D_3. Teken lijnstuk A_1B_1 door de punten A_3 en B_3, lijnstuk A_2D_2 door de punten A_3 en D_3 en lijnstuk C_1D_1 door de punten C_3 en D_3.

De constructie is nogal gecompliceerd. Daarom *samengevat,* gegeven de cirkel en zijn omgeschreven vierkant, dan tekenen we de volgende hulplijnstukken: *AC* en *BD*; *EG* en *FH*; A_1B_1, A_2D_2 en C_1D_1; A_1A_2 en AB_1; *PG*; *RS* na constructie van punt *S*; TE_1; GA_3 en, na constructie van punten *V* en *X*, tenslotte *XV*.

Bellgetallen

De verzameling {1, 2, 3} kan op 5 manieren worden verdeeld in disjuncte deelverzamelingen.

{1, 2, 3}		
{1}	{2, 3}	
{2}	{1, 3}	
{3}	{1, 2}	
{1}	{2}	{3}

Het getal 5 is het derde Bellgetal.

De Bellgetallen B_n, genoemd naar Eric Temple Bell (1883-1960), zijn gedefinieerd als het aantal mogelijkheden om de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ te verdelen in disjuncte deelverzamelingen.

De eerste vier Bellgetallen zijn $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$ en $B_3 = 5$.
De volgende relatie geeft een mogelijkheid om de volgende Bellgetallen te berekenen.

$$B_n = \binom{n-1}{0}B_0 + \binom{n-1}{1}B_1 + \ldots + \binom{n-1}{n-1}B_{n-1}$$

Voor B_4 vinden we met deze relatie:

$$\begin{aligned} B_4 &= \binom{3}{0}B_0 + \binom{3}{1}B_1 + \binom{3}{2}B_2 + \binom{3}{3}B_3 \\ &= 1.1 + 3.1 + 3.2 + 1.5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

De juistheid van bovenstaande relatie is als volgt in te zien:
Stel dat het element 1 in een zekere partitionering terecht komt in een deelverzameling van k elementen. Voor de andere $k - 1$ elementen van die deelverzameling zijn er

$\binom{n-1}{k-1}$ mogelijkheden, en de overblijvende $n - k$

elementen kunnen dan nog op B_{n-k} manieren worden gepartitioneerd. Er zijn blijkbaar

$\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}$ partitioneringen waarin 1 terecht komt

in een deelverzameling met k elementen, en in het totaal zijn er dus

$$B_n = \binom{n-1}{0}B_{n-1} + \binom{n-1}{1}B_{n-2} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}B_0$$

partitioneringen van n elementen. Via de relatie

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$$

kunnen we dit nog iets eenvoudiger schrijven als

$$B_n = \binom{n-1}{n-1}B_{n-1} + \binom{n-1}{n-2}B_{n-2} + \ldots + \binom{n-1}{0}B_0$$

Er bestaat een voor de hand liggende relatie tussen de Bellgetallen en de Stirlinggetallen van de tweede soort. De Stirlinggetallen $\left\{ n \atop k \right\}$ zijn gedefinieerd als het aantal partitioneringen van een verzameling met n elementen in k deelverzamelingen. En dus:

$$B_n = \left\{ n \atop 1 \right\} + \left\{ n \atop 2 \right\} + \ldots + \left\{ n \atop n \right\}$$

Het n-de Bellgetal is de som van de getallen in de n-de rij van de driehoek van Stirling voor deelverzamelingen.

Rob Bosch

Literatuur

Graham e.a. **Concrete Mathematics**
Comtet **Advanced Combinatorics**

Het snijpunt Y_1 van de hulplijnstukken XV en AC is dan het eerste hoekpunt van het te construeren vierkant.

Vergelijking

Onze eerste benadering van de kwadratuur van de cirkel heeft een absolute afwijking $(\chi - \pi)$ van $+1{,}2 \times 10^{-5}$ en een relatieve afwijking $(\chi - \pi) / \pi$ van $+3{,}9 \times 10^{-6}$, ofwel van minder dan $+0{,}0004\%$. Hij komt in dit opzicht overeen met het resultaat van Hustinx (1988).

Het absolute verschil $(\psi - \pi)$ van onze tweede benadering bedraagt $-2{,}9 \times 10^{-8}$. De relatieve afwijking $(\psi - \pi) / \pi$ bedraagt hier $-9{,}2 \times 10^{-9}$, ofwel minder dan $-0{,}000001\%$.

Ten opzichte van onze eerste benadering is de (absolute en relatieve) afwijking van de tweede benadering daarmee een factor van ruim $4{,}2 \times 10^2$ beter. Het resultaat van Hustinx (1988) is hiermee ruimschoots overtroffen.

Om een indruk te geven van de bereikte nauwkeurigheid, gegeven een cirkel met een omtrek van 40000 *kilometer*. Snijden we de aardbol met een vlak door de evenaar, dan ontstaat bij benadering een dergelijke cirkel. Gebruiken we nu ψ, dan vinden we een straal r_ψ van $40000 / (2\psi)$ kilometer. De werkelijke straal r_π bedraagt $40000 / (2\pi)$ kilometer. Het verschil $(r_\psi - r_\pi)$ tussen beide resultaten is gelijk aan $20000 \cdot (\pi - \psi) / (\pi \cdot \psi)$ kilometer. Afgerond is dit slechts 58,3 *millimeter*.

Berekeningen

Meer dan bij de berekeningen tot nog toe zullen we ons hier veelal beperken tot aanwijzingen en resultaten, in plaats van volledige afleidingen van resultaten. Gegeven dergelijke aanwijzingen is een volledige afleiding dan voor de hand liggend. Voorts, meer nog dan bij de eerste constructie staan er nu veel verschillende wegen open om de oppervlakte van vierkant $Y_1Y_2Y_3Y_4$ te bepalen. Geleid door de opzet van de constructie, maar overigens zonder al te veel voorkeur, hebben wij voor de volgende aanpak gekozen.

Voor de berekening maken we gebruik van een extra te construeren hulplijn, namelijk door het punt P en evenwijdig aan AD. De snijpunten van deze lijn met de lijnstukken AB, C_1D_1 en CD noemen we respectievelijk O_1, Q en O_2.

We bepalen nu eerst de lengte van lijnstuk O_1P. Het is direct duidelijk dat $O_1P = O_1A_2$. A_1A_2 is immers een diagonaal in vierkant $AA_2A_3A_1$ en $O_1P \,//\, AA_1$. Uit $\Delta AO_1P \sim \Delta ABB_1$ volgt dat $O_1P / BB_1 = (AA_2 - O_1A_2) / AB$. Na substitutie van O_1P voor O_1A_2 vinden we $O_1P = AA_2 \cdot BB_1 / (AB + BB_1)$.

Gebruik makend van de bekende lengtes van de lijnstukken AA_2, BB_1 en AB vinden we $O_1P = (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) / [2 + (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})] = (1\frac{1}{2} - \sqrt{2}) / (3 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$. We verdrijven de wortel uit de noemer en vinden $O_1P = (3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4}\sqrt{2}) / 8\frac{1}{2} = (14 - 9\sqrt{2}) / 34$.

Vervolgens bepalen we de lengte van lijnstuk RD_3. Uit $\Delta GO_2P \sim \Delta RQP$ volgt dat $(RD_3 + D_3Q)/(GD_2 + D_2O_2) = (O_1Q - O_1P)/(O_1O_2 - O_1P)$. Hieruit volgt (zie ook figuur 2) dat $RD_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{9}$.

Nu bepalen we de lengte van lijnstuk AT. Uit $\Delta RD_3S \sim \Delta RD_1T$ volgt dat $TD_1 / SD_3 = (RD_3 + D_3D_1) / RD_3$ met $SD_3 = \frac{1}{2}H_2D_2 - D_3D_2$. Daaruit vinden we direct dat $TD_1 = (64 - 28\sqrt{2}) / 79$ en $AT = AD_1 - TD_1 = (1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - (64 - 28\sqrt{2}) / 79 = (30 + 135\sqrt{2}) / 158$.

Vervolgens richten we ons op de lengtes van de lijnstukken EU, UV en AV. Uit $\Delta ATU \sim \Delta EE_1U$ volgt dat $EU/(AE + EU) = EE_1/AT$ en dus dat $EU = (75\sqrt{2} - 43) / 238$. Voorts geldt $A_2U = A_2E + EU$, dus $A_2U = (194\sqrt{2} - 43)/238$. Met behulp van de stelling van Pythagoras vinden we dan dat $UD_2 = \sqrt{(A_2U^2 + A_2D_2^2)}$ en dus dat $UD_2 = \sqrt{[(303697 - 16684\sqrt{2}) / 56644]}$. Uit de constructie volgt dat $UV = UD_2$. Tenslotte vinden we ook AV met behulp van de stelling van Pythagoras: $AV = \sqrt{[UV^2 - (AE + EU)^2]}$ en dus $AV = \sqrt{[(1069 - 193\sqrt{2}) / 238]}$.

Uit de constructie volgt dat de lengte van lijnstuk AX gelijk is aan die van lijnstuk A_2W. De constructie van punten W en X komt overeen met die van respectievelijk punt K en punt L in figuur 1. We herhalen de eerder bij die gelegenheid bepaalde lengtes: $AX = A_2W = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2$. (Gebruik bijv. $\Delta A_3D_2G \sim \Delta A_3A_2W$.)

Laat nu Z het snijpunt zijn van de lijn door de punten Y_2 en Y_1 met de lijn door A en D. Dan vinden we de lengte van Y_1Z bijvoorbeeld als volgt. Het is direct duidelijk dat $AZ = Y_1Z$; AA_3 is immers een diagonaal in vierkant $AA_2A_3A_1$ en $Y_1Z \,//\, A_3A_1$. Uit $\Delta Y_1ZV \sim \Delta XAV$ volgt dat $Y_1Z / XA = (AV - AZ) / AV$. We substitueren Y_1Z voor AZ en vinden $Y_1Z = [19513 - 12248\sqrt{2} - \sqrt{(2043583397 - 1445016731\sqrt{2})}] / 17986$. Ter verkrijging van dit resultaat hebben we de eerder beschreven procedure om een wortel uit de noemer te verdrijven twee maal achtereen toegepast.

De oppervlakte ψ van vierkant $Y_1Y_2Y_3Y_4$ is dan tenslotte gelijk aan $Y_1Y_2^{\,2} = (AB - 2Y_1Z)^2$. We vinden $\psi = \{[\sqrt{(2043583397 - 1445016731\sqrt{2})} + 12248\sqrt{2} - 1527] / 8993\}^2$. Het is vermeldenswaard dat alle numerieke resultaten van deze berekeningen exact zijn.

Ten slotte

Een elementaire meetkundige constructie kan altijd worden beschreven door algebraïsche vergelijkingen. Maar π is transcendent en dus kan dit getal niet worden geschreven als een wortel van enige algebraïsche vergelijking. Het is daardoor niet mogelijk om *vanuit een elementaire constructie zelf* de nauwkeurigheid van de bereikte benadering van de kwadratuur van de cirkel te bepalen. Met andere woorden, het getal π in de formules voor de afwijking $(\omega - \pi)$ en de relatieve afwijking $(\omega - \pi) / \pi$ moet exogeen, dat wil zeggen buiten de constructie om, worden bepaald. Zie ook Doeve (1999). Ter bepaling van de mate van nauwkeurigheid van onze twee benaderingen hebben wij dan ook π zelf *bekend* verondersteld.

De beide gevonden constructies blijken respectievelijk een nauwkeurige en een zeer nauwkeurige benadering op te leveren van de kwadratuur van de cirkel. De eerste constructie lijkt ons ook instructief voor een behandeling in de klas, niet alleen uit constructief-meetkundig oogpunt in de context van een klassiek probleem. Zij is ook illustratief met het oog op het uitvoeren van exacte en niet op goniometrische functies gebaseerde berekeningen bij meetkundige constructies.

Beide constructies hebben echter ook hun zwakke kanten. De voornaamste daarvan is, dat zij uitkomsten zijn van een primair proefondervindelijke aanpak. Beider ontwikkeling berust meer op intuïtie en ervaring dan op een systematische benadering van het probleem van de kwadratuur van de cirkel. Zo is daarmee bijvoorbeeld een eenduidige weg naar een nog grotere nauwkeurigheid van de benadering niet direct duidelijk. De tweede constructie is bovendien complex en zeker niet bijzonder elegant. Doeve (1999) ontwikkelt een aanpak die aan dergelijke bezwaren tegemoet komt.

Referenties

Doeve, W.L.J. (1999) **De Kwadratuur van de Cirkel door een Elementaire Constructie**
Euclides vol. 74 (te verschijnen)

Hustinx, P. (1988) **De Kwadratuur van de Cirkel**
Euclides vol. 63 nr. 6, p. 170-171

Nawoord van de Redactie

In de loop van 1996-97 stuurde de heer Hustinx de redactie enige summiere aantekeningen over een zogenoemde ‘benaderende berekening van π’. De eerste auteur van dit artikel heeft deze schetsmatige aantekeningen als vertrekpunt genomen, uitgebreid en van een wiskundige interpretatie voorzien.

Over de auteurs

Drs. W.L.J. Doeve is onder meer lid van de Kernredactie van Euclides. De heer P.L.M. Hustinx is bijna 40 jaar werkzaam geweest als chemisch technicus in de levensmiddelenindustrie; wiskunde is zijn hobby.

Een nimspel (deel I)

Saskia Oortwijn, Leon van den Broek

Nimspelen

Nim wordt gespeeld door twee spelers. Je hebt er alleen lucifers bij nodig. Nimspelen zijn duizenden jaren oud, ze zijn van Chinese afkomst en worden over de hele wereld gespeeld. Er zijn allerlei varianten. Het basisspel gaat als volgt. Er zijn twee rijtjes van een willekeurig aantal lucifers (de rijtjes hoeven niet hetzelfde aantal te bevatten). Om beurten pakken de spelers, naar eigen inzicht, uit een van de twee rijtjes een willekeurig aantal lucifers (minstens een, maar je mag bijvoorbeeld ook het hele rijtje wegpakken). Het spel is afgelopen als alle lucifers zijn weggenomen. De speler die de laatste lucifer(s) pakt, heeft gewonnen.
Na een paar keer spelen, hebben leerlingen in de brugklas het spel wel door: je moet de rijtjes even lang maken. Je tegenstander is dan gedwongen ze verschillend van lengte maken. Zodoende win je altijd; tenminste als jij niet moet beginnen met twee even lange rijtjes, want dan zijn de rollen omgedraaid. Hiermee is het basisspel 'opgelost'. Dat wil zeggen dat je meteen ziet of je in een winnende positie zit en dat je weet hoe je in dat geval moet spelen.
Er zijn veel varianten op dit basisspel. Zo kun je met meer rijtjes lucifers beginnen. Ook nu nemen de spelers om beurten een aantal lucifers (minstens één) weg uit een van de rijtjes. Degene die de laatste lucifer(s) pakt is weer winnaar. Deze variant is moeilijker dan het basisspel: het duurt langer voordat je het spel helemaal doorhebt. Om de winnende posities te beschrijven is het handig de aantallen lucifers binair te noteren. Zie bijvoorbeeld [1] voor een behandeling. In [1], [2] en [3] kun je nog veel meer varianten van het nimspel vinden. In dit artikel zullen we een andere variant bekijken. Onze variant lijkt op het basisspel, alleen nu is er een extra zet mogelijk. Net als bij het basisspel zijn er twee rijtjes lucifers. Je kunt uit een van de rijtjes een willekeurig aantal (minstens één) wegnemen, maar je kunt nu ook uit beide rijtjes een gelijk aantal wegnemen. Mag de opzet van de variant erg lijken op het basisspel, de manier waarop gespeeld moet worden om het spel te winnen is wezenlijk anders. Want, geef je aan je tegenstander twee rijtjes van gelijke lengte af, dan heb je nu juist verloren: je tegenstander mag in één keer alle lucifers wegnemen (de rijtjes zijn immers even lang !).
In [4] wordt onze variant kort genoemd. Hij is - met oplossing - afkomstig van R. Isaacs (1958).

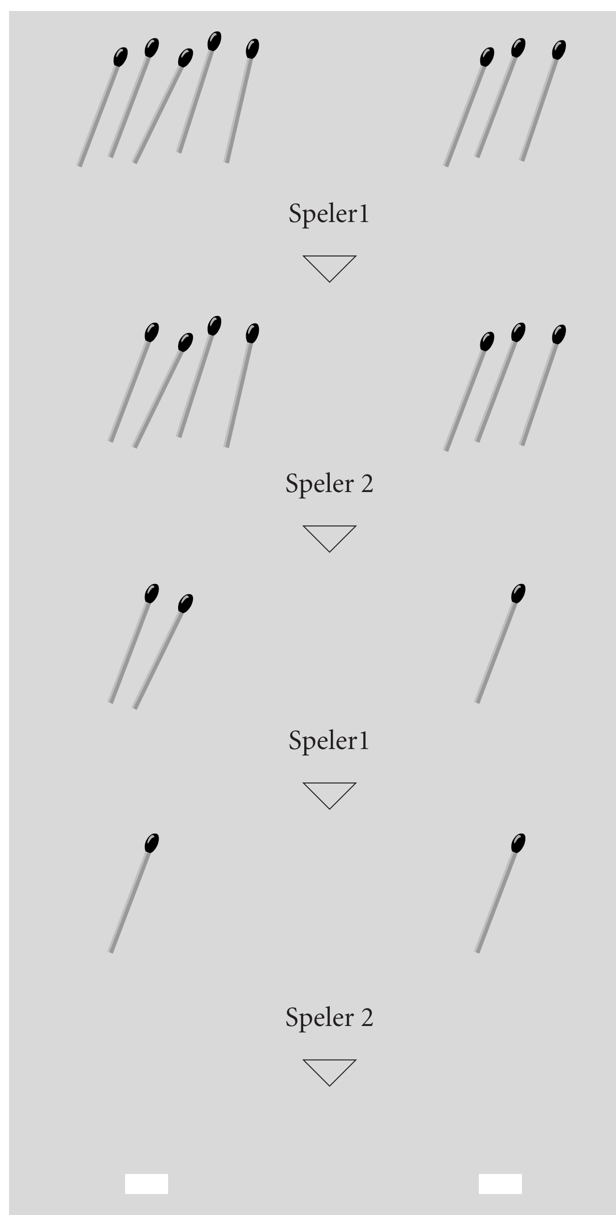
De opbouw van het artikel

Aan de hand van een voorbeeld zullen we onze variant leren spelen. In de daarop volgende paragraaf gaan we stap voor stap op zoek naar 'winnende posities', dat zijn posities van waaruit je (bij goed spel) altijd zult winnen. Als je tegenstander aan de beurt is en er ligt een winnende positie op tafel, dan is hij reddeloos verloren: Welke zet je tegenstander ook doet, jij hebt daarop een tegenzet, zodat welke zet hij ook doet, jij weer een tegenzet hebt, zodat welke zet hij ook doet … jij uiteindelijk de laatste lucifer(s) kunt pakken. Vergelijk het met een eindspel schaken waarin wit 'gewonnen staat': er staat dan een positie op het bord, waarbij zwart niet meer aan mat kan ontsnappen (als wit geen fouten maakt natuurlijk). Zwart kan het spel nog wel rekken, maar uiteindelijk komt hij toch mat te staan.
Wij zijn nog niet tevreden als we de winnende posities stap voor stap kunnen vinden. Wil je bijvoorbeeld weten of de positie met 123 lucifers in het ene rijtje en 158 lucifers in het andere rijtje winnend is, zul je de hele constructie moeten uitvoeren tot en met die positie. Liever hebben we een zodanige beschrijving van de verzameling winnende posities, dat je aan een positie direct kunt zien of hij winnend is. En daar gaan we naar op zoek. Er komt een heleboel wiskunde bij kijken. De gulden verhouding τ blijkt een grote rol te spelen.
In de laatste paragraaf presenteren we tenslotte schematisch hoe je moet spelen om het spel te winnen. Als je het spel speelt met iemand die het niet kent, en je begint met twee rijtjes met behoorlijk wat lucifers, dan krijg je tijdens het spel vast wel eens de kans om een winnende positie te bereiken. Daarna is het echter de kunst om het spel dan ook inderdaad te winnen…
Het artikel wordt (in deel II, in het volgende nummer van Euclides) na de paragraaf **Op zoek naar winnende posities** wat technisch van aard. Het is heel goed mogelijk het artikel slechts te lezen tot en met deze paragraaf.

Onze variant

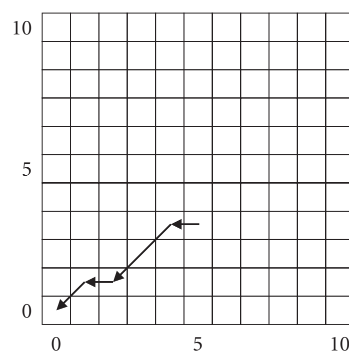
Bij onze variant van het nimspel zijn er twee spelers en twee rijtjes lucifers. Om beurten doen de spelers een zet. Een speler heeft voor een zet de keus uit twee mogelijkheden: of hij neemt uit een van de twee rijtjes

een willekeurig aantal lucifers (minstens een), of hij neemt uit beide rijtjes een gelijk aantal lucifers (ook minstens een). De speler die de laatste lucifer(s) pakt heeft gewonnen.
Een voorbeeld: we beginnen met een rijtje van 5 en een rijtje van 3 lucifers. Het spel zou zich als volgt kunnen ontwikkelen.



Speler 2 heeft de laatste twee lucifers gepakt en heeft dus gewonnen.
We noteren de positie waarbij in het eerste rijtje x lucifers liggen en in het tweede rijtje y met (x, y). De zet die positie (x, y) verandert in positie (u, v) noteren we zó: $(x, y) \rightarrow (u, v)$.

In het voorbeeld is het niet goed afgelopen voor speler 1. Maar had hij het niet slimmer kunnen spelen ? Speler 1 kreeg positie (2, 1) van zijn tegenstander. Hij was toen gedwongen een zet te doen, waarna zijn tegenstander altijd de laatste lucifer(s) kon wegnemen. Sterker nog: speler 1 zat al klem bij positie (5, 3). Welke zet hij dan namelijk ook doet, speler 2 kan direct de laatste lucifers wegnemen, of hij kan een van de posities (2, 1) en (1, 2) bereiken, en die zijn beide voor speler 1 weer verliezend.
Als je (2, 1) of (5, 3) afgeeft aan je tegenstander, win je (de ander kan dan niet voorkomen dat jij wint). Daarom noemen we deze posities *winnend*. We gaan op zoek naar alle winnende posities. (Winnend voor de speler die deze positie afgeeft; voor degene die hem ontvangt is de positie juist verliezend.) Bij dit speurwerk is het rooster in figuur 1 handig.

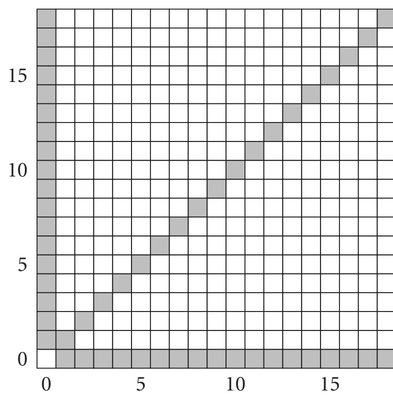


figuur 1

We nummeren de rijen van onder naar boven en de kolommen van links naar rechts, te beginnen met 0. Elk veld in het rooster stelt een positie voor. Een zet komt overeen met een horizontale verplaatsing naar links (zoveel velden als er lucifers uit het eerste rijtje worden weggenomen), of een verticale verplaatsing naar beneden (zoveel velden als er lucifers uit het tweede rijtje worden weggenomen), of een diagonale verplaatsing naar links-beneden (zoveel velden als er lucifers uit beide rijtjes worden weggenomen). In figuur 1 is het spelverloop van het voorbeeld weergegeven.

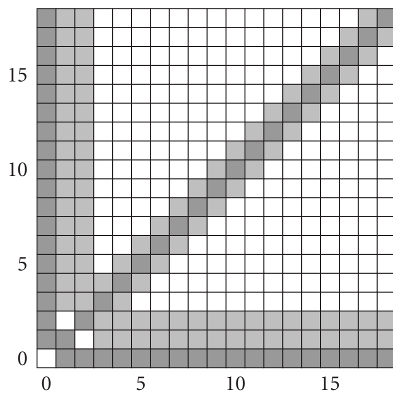
Op zoek naar winnende posities

Je wilt een winnende positie afgeven aan je tegenstander. Winnende posities noemen we kort *winners*. Verliezende posities noemen we *verliezers*. In de figuren 2 tot en met 7 laten we de winners ontstaan.
We beginnen in figuur 2. Uiteraard is (0, 0) een winner. De baan boven (0, 0) bestaat uit allemaal verliezers; geef je zo'n positie af aan je tegenstander, dan kan hij de resterende lucifers wegnemen. Evenzo de baan rechts van (0, 0) en de diagonale baan door (0, 0). Immers, vanuit al deze posities kan (0, 0) in één zet bereikt worden. Deze verliezers zijn allemaal grijs getint.



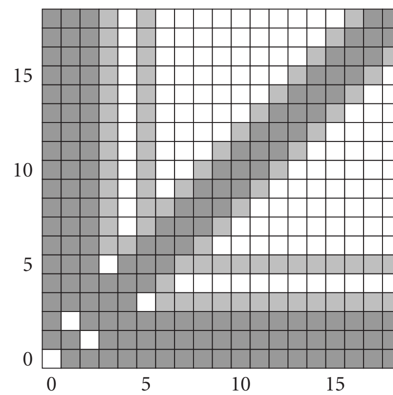
figuur 2

We zien in figuur 2 direct twee nieuwe winners ontstaan: (1, 2) en (2, 1). Vanuit deze twee posities is (0, 0) niet in één zet te bereiken. Geef je een van deze twee posities af aan je tegenstander, dan is deze gedwongen een zet te doen naar een grijs getinte verliezer, waarna jij vervolgens de winner (0, 0) kunt bereiken.

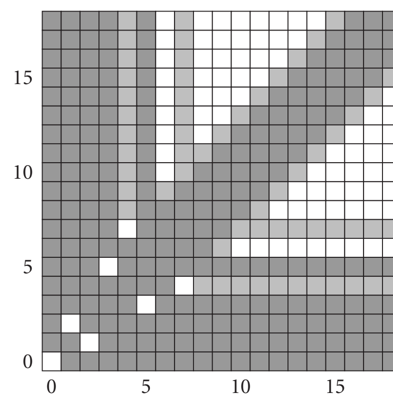


figuur 3

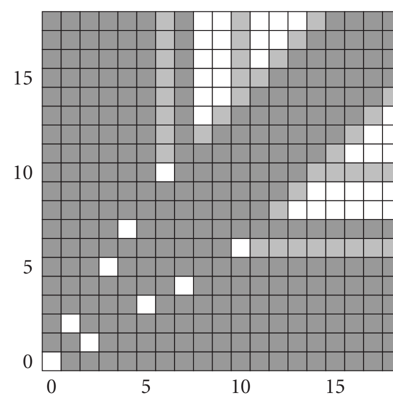
In figuur 3 zijn de verliezers uit figuur 2 weer aangegeven, nu met de donkere tint grijs. Uitgaande van de winners (1, 2) en (2, 1) bepalen we nieuwe verliezers: de posities verticaal boven (1, 2), horizontaal rechts van (1, 2) en diagonaal rechtsboven (1, 2). Vanuit deze posities kan in één zet de winner (1, 2) bereikt worden. Op dezelfde manier vind je de verliezers die horen bij de winner (2, 1). Al deze nieuw ontstane verliezers zijn lichtgrijs getint.
In figuur 3 zien we opnieuw twee winners ontstaan: (3, 5) en (5, 3). Vanuit deze twee zijn de posities (1, 2), (2, 1) en (0, 0) niet in één zet te bereiken. Geef je (3, 5) of (5, 3) af aan je tegenstander, dan is deze weer gedwongen een zet naar een grijze verliezer te doen, waarna jij een van de winners (1, 2), (2, 1) en (0, 0) kunt bereiken.
En zo verder in de figuren 4, 5, 6 en 7. Steeds zijn de verliezers die al uit de vorige figuur bekend waren donkergrijs getint en de nieuwe verliezers lichtgrijs. Het is duidelijk hoe het verder gaat. In elke volgende figuur



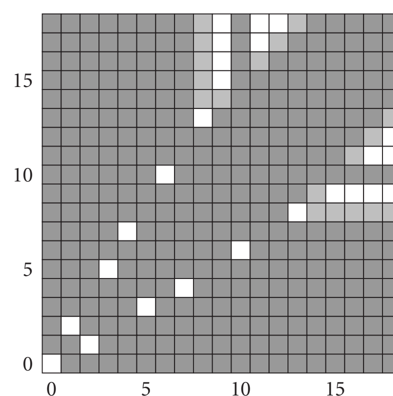
figuur 4



figuur 5

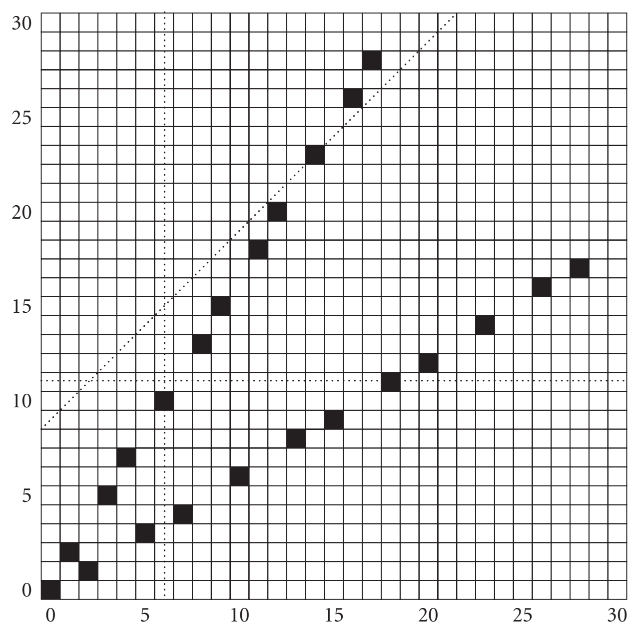


figuur 6



figuur 7

komen er twee winners bij. Na 11 stappen heb je 23 winners gevonden; die zijn in figuur 8 aangegeven.


figuur 8

We schrijven de winners die we tot nu toe hebben gevonden even op (we beperken ons tot de linkerkant van het rooster: dat zijn de winners waarvan de tweede coördinaat groter is dan of gelijk is aan de eerste coördinaat): (0, 0) , (1, 2) , (3, 5) , (4, 7) , (6, 10) , (8, 13) , (9, 15) , (11, 18) , (12, 20) , (14, 23) , (16, 26) , (17, 28)
We hebben de winners zo geconstrueerd dat het onmogelijk is om in één zet van een winner naar een andere winner te gaan. Stel bijvoorbeeld dat je in één zet van de winner (17, 28) naar de winner (3, 5) zou kunnen komen; dan zou de positie (17, 28) in figuur 4 grijs zijn gemaakt: daar hebben we immers alle posities grijs gemaakt, van waaruit je de positie (3, 5) in één stap kon bereiken.
Je ziet dat in de rij winners het verschil tussen de twee coördinaten steeds met 1 oploopt: bij (0, 0) is het verschil 0, bij (1, 2) is het verschil 1, enzovoort. Het kan niet zo zijn dat er twee winners zijn waarbij het verschil tussen de coördinaten gelijk is. Immers, stel er zijn twee winners waarbij het verschil tussen beide coördinaten 17 is: laten we zeggen (37, 54) en (143, 160). Dan zou je in één stap van (143, 160) naar (37, 54) kunnen (door uit beide rijtjes 106 lucifers weg te nemen). En dat kon nu net niet!
Verder zie je dat elk getal (behalve 0) precies één keer voorkomt: hetzij als eerste coördinaat; hetzij als tweede coördinaat. Het is ook logisch dat een getal niet in twee winnende posities kan voorkomen. Stel maar dat 37 voorkomt in twee verschillende winnende posities; laten we zeggen (22, 37) en (37, 84). Dan zou ook (37, 22) winnend zijn en je kunt in één zet van (37, 84) naar (37, 22) komen (door van de 84 lucifers er 62 weg te nemen). En dat kon nu net niet !

Het is nu eenvoudig om de rij winners na (17, 28) voort te zetten: het verschil van de coördinaten in de volgende winner moet 12 zijn (1 meer dan het verschil van 17 en 28). Kies nu voor de eerste coördinaat een zo klein mogelijk getal dat nog niet is voorgekomen in de vorige winners: in dit geval 19. De eerstvolgende winner is dus (19, 31). Om voor jezelf vlot het rijtje voort te kunnen zetten, is het misschien handig om weer helemaal opnieuw te beginnen bij (0, 0). Zo krijg je een beetje feeling voor het systeem.

Deze manier om stap voor stap winnende posities te vinden, is niet helemaal bevredigend. Immers, wil je weten of bijvoorbeeld de positie (123, 158) winnend is, dan zul je eerst een hele lijst moeten maken van alle winnende posities totdat je een van de getallen 123 of 158 tegenkomt. (Een simpel computerprogramma genereert zo'n lijst natuurlijk wel vrij vlot).
In **appendix 1** staat een lijst van de eerste 255 winnende posities.
In het tweede deel van dit artikel, dat in het volgende nummer van Euclides zal komen, gaan we de verzameling van alle winnende posities beschrijven, zodat we aan een positie *direct* kunnen zien of hij winnend is of niet.

Literatuur

1 *F. Schuh*, **Spelen met Getallen**, Thieme, Zutphen, 1951
Hoofdstuk 6 van dit boek gaat over het nimspel. Hier wordt ook een winnende speelwijze gegeven voor de eerste variant van het nimspel, die aan het begin dit artikel genoemd wordt.
2 *F. van Grunfeld e.a.*, **Spelletjes uit de hele Wereld**, Kosmos, Amsterdam, 1975
Bladzijde 286 en 287 gaan over luciferspelletjes, ondermeer het nimspel. Verder staat dit boek vol met spelletjes en puzzels om zelf te maken.
3 *A. van Gaalen, I. Mahieu*, **Turven en zestig andere rekenspelletjes**, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1991
In dit boekje worden meerdere varianten van het nimspel besproken. Verder staat het vol met (hoe kan het ook anders) spelletjes die iets met rekenen of getallen te maken hebben.
4 *C. Berge*, **Graphs et Hypergraphs**, Paris, 1985
Onze variant wordt kort besproken op bladzijde 324.
5 *D. Pedoe*, **Perspectieven doorzien**, Aramith Uitgevers, Amsterdam, 1988
In dit boek wordt de gulden snede uitgebreid besproken. Ook wordt de gulden snede vanuit historisch en esthetisch oogpunt belicht. Bovendien wordt het verband met de rij van Fibonacci gelegd.

Appendix 1: de eerste 255 winnende posities

De winnende posities waarbij het tweede rijtje meer lucifers bevat dan het eerste.

(1, 2)	(3, 5)	(4, 7)	(6, 10)	(8, 13)	(9, 15)	(11, 18)	(12, 20)	(14, 23)	(16, 26)
(17, 28)	(19, 31)	(21, 34)	(22, 36)	(24, 39)	(25, 41)	(27, 44)	(29, 47)	(30, 49)	(32, 52)
(33, 54)	(35, 57)	(37, 60)	(38, 62)	(40, 65)	(42, 68)	(43, 70)	(45, 73)	(46, 75)	(48, 78)
(50, 81)	(51, 83)	(53, 86)	(55, 89)	(56, 91)	(58, 94)	(59, 96)	(61, 99)	(63, 102)	(64, 104)
(66, 107)	(67, 109)	(69, 112)	(71, 115)	(72, 117)	(74, 120)	(76, 123)	(77, 125)	(79, 128)	(80, 130)
(82, 133)	(84, 136)	(85, 138)	(87, 141)	(88, 143)	(90, 146)	(92, 149)	(93, 151)	(95, 154)	(97, 157)
(98, 159)	(100, 162)	(101, 164)	(103, 167)	(105, 170)	(106, 172)	(108, 175)	(110, 178)	(111, 180)	(113, 183)
(114, 185)	(116, 188)	(118, 191)	(119, 193)	(121, 196)	(122, 198)	(124, 201)	(126, 204)	(127, 206)	(129, 209)
(131, 212)	(132, 214)	(134, 217)	(135, 219)	(137, 222)	(139, 225)	(140, 227)	(142, 230)	(144, 233)	(145, 235)
(147, 238)	(148, 240)	(150, 243)	(152, 246)	(153, 248)	(155, 251)	(156, 253)	(158, 256)	(160, 259)	(161, 261)
(163, 264)	(165, 267)	(166, 269)	(168, 272)	(169, 274)	(171, 277)	(173, 280)	(174, 282)	(176, 285)	(177, 287)
(179, 290)	(181, 293)	(182, 295)	(184, 298)	(186, 301)	(187, 303)	(189, 306)	(190, 308)	(192, 311)	(194, 314)
(195, 316)	(197, 319)	(199, 322)	(200, 324)	(202, 327)	(203, 329)	(205, 332)	(207, 335)	(208, 337)	(210, 340)
(211, 342)	(213, 345)	(215, 348)	(216, 350)	(218, 353)	(220, 356)	(221, 358)	(223, 361)	(224, 363)	(226, 366)
(228, 369)	(229, 371)	(231, 374)	(232, 376)	(234, 379)	(236, 382)	(237, 384)	(239, 387)	(241, 390)	(242, 292)
(244, 395)	(245, 397)	(247, 400)	(249, 403)	(250, 405)	(252, 408)	(254, 411)	(255, 413)	(257, 416)	(258, 418)
(260, 421)	(262, 424)	(263, 426)	(265, 429)	(266, 431)	(268, 434)	(270, 437)	(271, 439)	(273, 442)	(275, 445)
(276, 447)	(278, 450)	(279, 452)	(281, 455)	(283, 458)	(284, 460)	(286, 463)	(288, 466)	(289, 468)	(291, 471)
(292, 473)	(294, 476)	(296, 479)	(297, 481)	(299, 484)	(300, 486)	(302, 489)	(304, 492)	(305, 494)	(307, 497)
(309, 500)	(310, 502)	(312, 505)	(313, 507)	(315, 510)	(317, 513)	(318, 515)	(320, 518)	(321, 520)	(323, 523)
(325, 526)	(326, 528)	(328, 531)	(330, 434)	(331, 536)	(333, 539)	(334, 541)	(336, 544)	(338, 547)	(339, 549)
(341, 552)	(343, 555)	(344, 557)	(346, 560)	(347, 562)	(349, 565)	(351, 568)	(352, 570)	(354, 573)	(355, 575)
(357, 578)	(359, 581)	(360, 583)	(362, 586)	(364, 589)	(365, 591)	(367, 594)	(368, 596)	(370, 599)	(372, 602)
(373, 604)	(375, 607)	(377, 610)	(378, 612)	(380, 614)	(381, 617)	(383, 620)	(385, 623)	(386, 625)	(388, 628)
(389, 630)	(391, 633)	(393, 636)	(394, 638)	(396, 641)	(398, 644)	(399, 646)	(401, 649)	(402, 651)	(404, 654)
(406, 657)	(407, 659)	(409, 662)	(410, 664)	(412, 667)					

Winterweken wiskunde in Zuid-Afrika

Heleen Verhage

Inleiding

In Zuid-Afrika is alles anders. De zon beweegt de verkeerde kant uit en staat midden op de dag in het Noorden, het bad loopt leeg tegen de klok in, auto's rijden aan de linkerkant van de weg en in de zomer is het er winter. Buiten is het warm (jas uit) en binnen is het koud (jas aan). Er zijn 11 officiële talen, waaronder naast Engels en Afrikaans onder andere isiZulu en isiXhosa.
Sinds augustus 1994, enkele maanden na de historische verkiezingen die het einde van de apartheidspolitiek betekenden, kom ik jaarlijks een of twee keer in Zuid-Afrika. Vaak in juli of augustus, want dan is de BV Nederland gesloten en kan een mens ongemerkt makkelijk een aantal weken weg. Ook dit jaar was het weer zover en ik maak u graag deelgenoot van enkele overzeese ervaringen.

Op weg naar een 'historical disadvantaged university'

Elk jaar is er in de tweede week van juli het congres van Amesa, de Zuid-Afrikaanse Vereniging van Wiskundeleraren. Het beleid van Amesa is om het congres elk jaar in een andere stad te houden, en daarbij de 'so called historical disadvantaged universities' niet uit de weg te gaan. Dit jaar was de University of the North in Pietersburg (ruim 300 km ten noord-oosten van Johannesburg, niet ver van de grens met Zimbabwe) aan de beurt.
Gewapend met enkel het postbusnummer van de universiteit stapte ik in Johannesburg in mijn knalrode huurauto, vol vertrouwen dat ik in Pietersburg ter plekke wel zou uitvinden waar de Universiteit zich



De verkiezingen in Zuid-Afrika in april 1994. Deze foto is altijd goed voor een opdracht over schatten: hoeveel mensen staan er in de rij?

precies bevond. Maar dat viel tegen. In heel Pietersburg geen enkele aanduiding van waar de universiteit was. Domweg onvindbaar. Na enige omzwervingen kwam ik erachter hoe de vork in de steel zat: de universiteit was 30 km verderop gesitueerd. Typisch een erfenis van de apartheidspolitiek, zo'n 'bush college' voor de zwarten, zover van de blanke stad af dat het welhaast gegarandeerd was dat de zwarten zich niet met de blanken zouden mengen. Pas 25 km buiten de stad verscheen het eerste en laatste verkeersbord, met het opschrift 'Universiteit van Houtbosdorp'.


Prof. Cyril Julie van de Universiteit van Westkaap houdt een voordracht op de Amesa conferentie.

Het Amesa congres

Het congres duurde vijf dagen en werd bijgewoond door ruim 250 deelnemers, afkomstig uit het hele land. Sommige deelnemers waren meer dan 24 uur met de bus onderweg geweest, want van Kaapstad naar Pietersburg is 1700 km. Even vertalen naar de Nederlandse situatie: zou u met de nachtbus voor 5 dagen naar zeg midden Italië afreizen voor een conferentie van de NVvW? Bij aankomst werd meteen een dik boekwerk met Proceedings uitgereikt, zodat je alvast 40 bijdragen op papier had. De onderwerpen die aan bod waren zijn herkenbaar: problem solving, de rol van spelletjes, toetsing, breukenonderwijs, rekenmachines, negatieve getallen, gegevensverwerking, meetkunde, projectwerk, algebra, etc. Veel onderwerpen werden geplaatst in de context van de nieuwe ontwikkelingen, zoals Curriculum 2005 (zie verderop). De aandacht voor technologie was beperkt, maar ontbrak niet. Ook in Zuid-Afrika is men bezig met programma's als Sketchpad en Cabri, en met de grafische rekenmachine niet te vergeten. Jaarlijks ziet de organisatie kans om zo'n vier gastsprekers uit het buitenland aan te trekken. Dit jaar was dat relatief eenvoudig, omdat de internationale conferentie PME (Psychology of Mathematics Education) een week later in het lieflijk gelegen Stellenbosch werd gehouden. Stellenbosch is het hart van de wijnstreek, vlak bij Kaapstad. Heel wat buitenlandse 'maths educators' trokken dus toch al naar Zuid-Afrika deze zomer, pardon winter.

De vereniging Amesa

De vereniging Amesa is ongeveer vijf jaar geleden ontstaan uit een fusie van negen verschillende verenigingen voor wiskundeleraren. De grootste van die verenigingen was Masa, met voornamelijk blanke leden. Bij de oprichting telde Amesa ongeveer 2500 leden, op dit moment zijn er ongeveer 1300 leden. Dit teruglopend ledental is een van de aandachtspunten voor het komend jaar, zo vertelt Aarnout Brombacher mij. Hij is zojuist op het congres tot de nieuwe voorzitter gekozen, met een zittingstermijn van twee jaar.
In elk van de negen provincies van Zuid-Afrika is een regionale afdeling, waarbij de afdelingen in de West Kaap (rond Kaapstad) en

Gauteng (omgeving Johannesburg en Pretoria) het meest actief zijn. Belangrijke activiteiten van Amesa zijn het jaarlijkse congres en het tijdschrift Pythagoras, dat vier keer per jaar verschijnt. Daarnaast zijn er dan regionale conferenties (meestal een dag) en verschijnt er regelmatig een nieuwsbrief.
Verder participeert Amesa volop in de discussies en ontwikkelingen die gaande zijn in Zuid-Afrika in het kader van Curriculum 2005.

Curriculum 2005

Curriculum 2005 is de naam van een grootscheepse operatie van onderwijshervorming. Zoals de naam al doet vermoeden, is het streven dat in het jaar 2005 voor alle vakken een volledig vernieuwd curriculum is doorgevoerd in zowel basis- als voortgezet onderwijs (Grade 1-12). (Voor het gemak laat ik de nieuwe Kwalificatiestructuur die voor het volwassenen-onderwijs is ontworpen buiten beschouwing, maar ook dat is een gigantische operatie). Mede gevoed door de slechte Timss resultaten (Zuid- Afrika was nummer laatst) zijn de ambities van het Zuid-Afrikaanse ministerie van onderwijs voor het jaar 2005 buitengewoon hoog. De plannen zijn mooi en papier is geduldig, maar de praktijk is o zo weerbarstig. Waar ik de kans krijg zeg ik dat substantiële veranderingen in het onderwijs al gauw zo'n 20 jaar kosten, zelfs in een overzichtelijk en goed georganiseerd land als Nederland. 'Maths educators' reageren dan steevast met 'zeg dat maar tegen onze politici!' Dit neemt natuurlijk niet weg dat er wel gisteren begonnen kan worden (en ook is, want de Zuid-Afrikaanse overheid gaat zeer voortvarend te werk), want elke stap, hoe klein ook, is er weer een.



Situatie op de scholen

Onder de apartheidssituatie lagen de klassengroottes op respectievelijk blanke, kleurlingen- en zwarte scholen zeer uit elkaar, het meest ten nadele van de zwarte scholen. Ook de materiële voorzieningen waren voor de drie categorieën zeer verschillend. De nieuwe regering wil dit gelijk trekken voor alle scholen en heeft de gemiddelde klassengrootte bepaald op 45 leerlingen. Een terechte politiek, want als overheid moet je op macro-niveau denken. De praktische uitvoering van dit beleid gaat echter niet zonder horten en stoten. In de Westkaap bijvoorbeeld hadden veel scholen tot voor kort een te gunstige 'pupil-teacher ratio' en heeft men docenten moeten ontslaan.
Ik was op een school in Mitchell's Plain op de Kaapse Vlakte waar het aantal docenten in twee jaar tijd

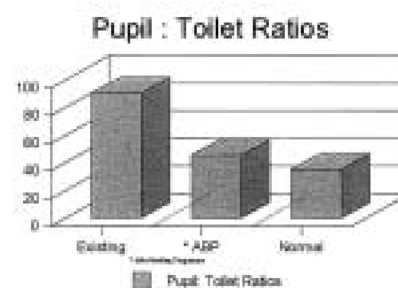


Diagram van de 'leerling:toilet'-verhouding in de North West Province

van 64 is teruggebracht tot 38, met gelijkblijvend aantal leerlingen. De tragiek van deze school was dat het een technische school is met prachtige, goed geoutilleerde vaklokalen. Die staan nu grotendeels leeg, want het is veel te gevaarlijk om met 45 leerlingen onder leiding van één docent te gaan lassen. Een enorme kapitaalvernietiging dus. Vergeleken met grote delen van het land is de Westkaap gemiddeld gesproken nog goed af, alhoewel de beroerde omstandigheden in de diverse townships rond de stad niet onderschat moeten worden. Het aantal 'informal settlements' neemt daar hand over hand toe.
Op de zogenoemde 'farm schools' echter in bijvoorbeeld de Oostkaap (de voormalige Transkei) komen klassen voor van 100 leerlingen en meer, en dan ook nog Grade 1 tot en met 12 door elkaar. De dag

begint met het buiten zetten van de stoelen en het schoolbord, want een klaslokaal is er niet. Toiletten ontbreken en als het regent is het pech gehad. Als de leerkracht zelf zijn of haar middelbare schoolopleiding heeft afgemaakt, is dat mooi. De leerlingen spreken verschillende talen en kunnen soms elkaar niet eens verstaan. Het onderwijs vindt plaats in het Engels, wat noch voor de leerlingen noch voor de leerkracht de eerste taal is. Het enige houvast voor de leerkracht is het boek, waar hij of zij als enige over beschikt.



Outcomes Based Education

Voor docenten die onder dit soort omstandigheden moeten werken, is het een haast onmogelijke krachttoer om over te schakelen naar Curriculum 2005 en OBE. Dat laatste staat voor Outcomes Based Education, een soort top-down benadering waarbij men begint met het formuleren van heel globale, nogal maatschappelijk gerichte, eindtermen voor het onderwijs. Er worden acht leergebieden onderscheiden, waarvan 'Mathematical Literacy, Mathematics and Mathematical Sciences' er een is. Per leergebied zijn er dan de 'Specific Outcomes', voor het wiskundeleergebied zijn dat er tien. Een Specific Outcome is bijvoorbeeld: 'Demonstrate understanding about ways of working with numbers'.
In het verleden schreef de syllabus zo ongeveer van week tot week voor wat er moest gebeuren, en daar wil men nu, terecht lijkt mij, vanaf. Het beleid is nu om docenten veel vrijer te laten in het vormgeven van hun onderwijs, de 'teacher as designer' zogezegd. Er wordt door allerlei mensen en instanties hard aan gewerkt om de outcomes voor wiskunde te vertalen naar leerstofinhouden, maar dit is een enorme klus. Bovendien zal er ook zeer veel nascholing nodig zijn, zowel op vakinhoudelijk als didactisch gebied. Op dit moment gebeurt er op dat gebied nog veel te weinig. Ook op het gebied van toetsen circuleert er een geheel nieuw concept: 'continuous assessment', in plaats van de twee jaarlijkse eindesemester toetsen.

Een incident

Misschien klinkt het verhaal tot nu toe wat somber, maar dat is toch ook weer niet mijn bedoeling. 'See it as a challenge', zogezegd. Zo'n reis naar Zuid-Afrika doet je beseffen dat we in Nederland soms wel erg op de details zitten te millimeteren. In Zuid-Afrika is echt werk aan de winkel, handen uit de mouwen en er tegen aan. Op het gebied van wiskundeonderwijs worden enorm veel projecten uitgevoerd,

waarvan vele gefinancierd door NGO's (Non Gouvernementele Organisaties, typisch een woord uit



het jargon van ontwikkelingssamenwerking). Met een enorme bevlogenheid geven vele mensen hun beste krachten, zij het soms helaas niet zonder risico's.
Tijdens mijn bezoek vond in Guguletu, een township bij Kaapstad, de 'science competition' plaats. Dit is een wedstrijd voor scholieren waarbij men in teamverband een bepaalde opdracht moet uitvoeren, qua opzet enigszins te vergelijken met de A-lympiade, maar dan voor science. Drie medewerkers van een wiskunde-project van de University of Cape Town bezochten samen met een buitenlandse gast dit evenement. Met als trieste afloop dat bij het verlaten van de happening, op klaarlichte dag, hun auto gekaapt werd: vier gangsters aan de portieren, autosleutels inleveren, sieraden werden afgenomen. Binnen enkele seconden was het gebeurd.

See it as a challenge

Als de problemen op macro-niveau zo groot lijken te zijn dat je niet meer weet waar te beginnen, dan is dé oplossing om op micro-niveau aan de slag te gaan. Eén werkblad in één klas met één docent, dat maakt het leven weer overzichtelijk. Ik heb een schitterende les over breuken bijgewoond, waarbij de docent zich feilloos een weg wist te banen door de breukendidaktiek die het ook in Nederland zo goed doet. Met een verhaal over het verdelen van pizza's wist hij alle 45 kinderen mee te krijgen bij het herontdekken van de equivalentie van 1/5 en 2/10.

Het Freudenthal Instituut (FI) blaast ook een partijtje mee in Zuid-Afrika. Wij werken samen met de University of the Western Cape (UWC) in het project REMESA (dat staat voor REalistic Mathematics Education in South Africa). Als onderdeel van dit project komt een groep van tien docenten wekelijks bij elkaar om onder leiding van een Zuid-Afrikaanse projectmedewerker te werken aan het ontwikkelen van lesmateriaal, mede geïnspireerd door materialen van het FI. Ik smaakte het genoegen enkele lessen van deze docenten met de ontwikkelde materialen bij te wonen, in het kader van het thema Consumer Mathematics, waar de groep op dit moment mee bezig is. Het rekenen met procenten nam hierbij een belangrijke plaats in. De volgende opgave, die waarschijnlijk in havo A niet zou misstaan, werd gedaan met leerlingen van Grade 11.

(…)
The total population of South Africa is approximately 40 million.
a The economically active population is 14,3 million. What percentage is this of the total population?
b In the economically active group approximately 72% are westernised. How many people in this group are westernised?
c What percentage of the total population of South Africa is both westernised and economically active?

Ook de leerlingen die het algoritme voor het uitrekenen van percentages nog wisten, hadden de grootste moeite met vraag c: wat wordt daar nou precies gevraagd? De leerlingen leren dan weliswaar het algoritme, maar ze hebben geen schema of visualisatie van het probleem om op terug te vallen als ze niet meteen herkennen hoe het antwoord uitgerekend moet worden. Het ligt voor de hand dat hier grote winst te behalen valt met het introduceren van enkele modellen zoals procentenstrook en dubbele getallenlijn, zelfs in klassen met 45 leerlingen. Zo'n observatie geeft toch weer moed. 'See it as a challenge!', dat heb ik wel geleerd te zeggen in Zuid-Afrika.

Nawoord

Wilt u in contact komen met de vereniging Amesa, dan kunt u zich wenden tot de voorzitter:
Aarnout Brombacher, email aarnout@brombach.wcape.school.za
Het lidmaatschap van Amesa staat open voor buitenlanders.

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Van de bestuurstafel

Jaarvergadering
We kunnen wederom terugkijken op een zeer geslaagde jaarvergadering c.q. studiedag. Het aantal deelnemers is onverminderd hoog, en er zijn steeds meer dingen te horen, te zien, te doen en te koop. De jaarvergadering kunt u niet missen als u op de hoogte wilt blijven van de ontwikkelingen op uw vakgebied.

Enige honderden leden gingen een dag lang 'op zoek naar wiskunde'.
Het is heel bijzonder om aan het eind van de middag een hele zaal bezig te zien met het vouwen van een gelijkzijdige driehoek. En waar vind je elders zoveel mensen die de humor van een kantelend achtvlak verstaan?
We hebben een bijzonder vak. En veel mensen die daar heel inspirerend van getuigen.

Docent van het jaar
Dat bleek ook bij de verkiezing van Docent van het Jaar, waarover ik eerder berichtte. Alle directies van scholen hebben een brief gekregen met de uitnodiging hun kandidaat voor te dragen. Onder de kandidaten die door de voorselectie heen waren gekomen, was ook een aantal docenten wiskunde, enthousiast voorgedragen door hun collega's, of (nog mooier misschien) door de leerlingen. Wie uiteindelijk de prijs in de wacht zal slepen, wordt bekend gemaakt op 28 januari, tijdens de NOT.

Wittebrood, hoe lang?
Ook voor mij persoonlijk was de jaarvergadering een feestelijke dag; de eerste uren van het voorzitterschap krijg je vooral veel gelukwensen en nog weinig problemen te verwerken. Maar dat veranderde snel.

Programma's Tweede Fase havo/vwo
Op 3 november j.l. had het ministerie van OC&W in een vertrouwelijk stuk aan de besturen van de vakverenigingen een aantal voorstellen gedaan om de algehele overladenheid te verlichten. Die overladenheid was geconstateerd door de scholen die in augustus begonnen waren. Voor wiskunde vwo B1,2 werden de onderdelen geschrapt waarover al eerder overlegd was, en die op basis van de experimenten in Profi waren voorgesteld. Bij alle andere wiskundevakken stond er een zinsnede dat de CEVO zonodig onderdelen in de ijskast zou kunnen plaatsen. Die ijskast is een goede bekende bij het wiskundeprogramma, dus we konden ons in deze voorstellen wel vinden.

Tot onze verbazing bleek echter het definitieve voorstel dat op 23 november naar de Tweede Kamer ging, nogal af te wijken van het eerdere concept, zonder dat de vereniging over die veranderingen was geraadpleegd. In het begeleidend schrijven werd gesuggereerd dat dit wèl het geval was. Hiertegen heeft het bestuur heftig geprotesteerd in brieven (en telefoontjes) naar het ministerie, de staatssecretaris en de leden van de Vaste Kamercommissie voor Onderwijs. Een protest tegen de voor ons onaanvaardbare procedure, maar ook tegen de inhoud van de voorgestelde wijzigingen, die voor ons volkomen nieuw was. Maar de voorstellen waren vrij ingrijpend en betroffen veel juist vernieuwende onderdelen. Zoiets moet je niet zomaar doen zonder er eerst serieus over te praten, vonden wij.

Mede op grond hiervan heeft de staatssecretaris in het overleg met de Kamer op 3 december die nieuwe wijzigingsvoorstellen teruggenomen, zodat we weer in de oude situatie terug zijn, met de CEVO-ijskast achter de hand.

Inmiddels is gebleken dat het om een misverstand ging, en het geen kwade opzet van het ministerie was om de vereniging buiten te sluiten. Men had een bericht, van een andere afzender, volkomen verkeerd geïnterpreteerd als zijnde afkomstig van de vereniging, en dat verder niet gecontroleerd.
Dat geeft aan hoe makkelijk er onder tijdsdruk fouten worden gemaakt, die verstrekkende gevolgen kunnen hebben. Uiterst leerzaam voor alle betrokkenen...

Dat was het einde van de tweede week van mijn voorzitterschap, voorwaar een levendige functie.

Hoe nu verder?
Uiteraard zullen we de ontwikkelingen nauwlettend volgen: het APS monitort scholen die nu begonnen zijn, en u en ik staan voor (en in) de klas en werken met de leerlingen, zodat knelpunten tijdig gesignaleerd kunnen worden.

Marian Kollenveld

INTERVIEW

Op weg naar een zelfstandiger leerling

Victor Schmidt

Onder de titel van dit artikel hield **Jos Tolboom** (32), docent wiskunde en informatica aan het Rölingcollege te Groningen, tijdens de laatste studiemiddag 'Aansluiting Voortgezet Onderwijs - Hoger Onderwijs' in Groningen een workshop. In deze goed bezochte workshop werd ingegaan op de invoering van de Tweede Fase en het studiehuis aan datzelfde Rölingcollege. Jos wist zijn gehoor duidelijk te maken dat er zowel aan de leerlingen als aan de docenten een en ander zou moeten veranderen. Na afloop van de studiemiddag heb ik een gesprek met hem.

In je workshop had je het er over dat jouw school al zes jaar bezig is met zelfstandig leren. Destijds stond dat nog niet zo in de belangstelling als nu. Hoe is het Rölingcollege daar toe gekomen?
Ik moet je het antwoord eerlijk schuldig blijven. Toen ik er kwam werken was men er al mee bezig. Zoals op meer scholen hadden docenten moeite met het leergedrag van leerlingen uit klassen als havo 4. Wellicht is het daar van gekomen. Bovendien zijn we op een gegeven moment overgegaan naar lesuren van 60 minuten. In eerste instantie was dat vooral een maatregel om het maken van het rooster makkelijker te maken, maar het bleek verstrekkende gevolgen te hebben voor de lessen zelf. Je kunt nu eenmaal geen volledig uur vol praten.

Hebben jullie de Tweede Fase volledig ingevoerd?
Nee, we hebben gekozen voor de veilige weg, dat wil zeggen dat we nu begonnen zijn in vwo 4 en volgend jaar ook met de havo van start gaan. Op die manier spreid je de invoeringsproblemen over twee jaren en komt niet alles ineens.

Hoe is bij jullie de invoering in zijn werk gegaan?
Zoals gezegd zijn we al zes jaar in de richting van zelfstandig leren bezig. Het is een geleidelijk groeiproces geweest. De feitelijke invoering zelf hebben we vooral projectmatig aangepakt. We hebben voor de gehele bovenbouw een kernteam met alle docenten die daar les geven en waarbinnen projecten werden uitgevoerd. Daarnaast is er sprake van een stuurgroep die het geheel overziet, coördineert en bijstuurt.

In de stuurgroep zit zeker het schoolmanagement.
Ten dele. Zo maakt onze rector geen deel uit van de stuurgroep. Daarnaast kon je je als docent aanmelden voor een plaats in deze groep.

Jullie zullen ongetwijfeld te maken hebben gehad met docenten die de vernieuwing met argusogen bekijken.
Ja zeker, maar we hebben ons tot doel gesteld dat 80% van alle docenten zich moeten kunnen vinden in onze opzet van de Tweede Fase. Om dat voor elkaar te krijgen werden er vaak voorstellen ingediend met een tamelijk radicale strekking. Als je dan als indieners voor het oog van de troepen een stapje terug deed, had je in veel gevallen toch je doel bereikt en de tegenstanders het idee gegeven dat er naar hen geluisterd was.

En die voelen zich dan achteraf niet bekocht of zoiets?
Nee hoor. Maar wij hebben ons gerealiseerd dat het noodzakelijk is te luisteren naar dissidente docenten. Ze hebben een belangrijke bijdrage en zo blijven ze betrokken bij het vernieuwingsproces. Op de workshop bijvoorbeeld was zo'n dissident van onze school aanwezig. Hij stelde daar kritische vragen, maar hij liet zijn gezicht wel zien. Zo betrokken voelde hij zich kennelijk wel.

Als je nou eens vakcollega's die dit interview lezen en nog niet tot invoering van het studiehuis zijn overgegaan, een aantal tips zou willen geven, waar denk je dan aan?
Om te beginnen raad ik hen aan zich degelijk te informeren. Er wordt zoveel gezegd en geschreven over dit onderwerp. Je kunt vaktijdschriften lezen, methodekeuzeconferenties bezoeken, op studiedagen van de NVvW met collega's praten.

Daar heeft niet elke docent evenveel tijd voor…
Daar snijd je iets aan wat me erg bezig houdt, de werkdruk onder docenten. Nu ben ik niet iemand die elk gewerkt uur met een telraam bijhoudt, maar ik vind het tegenwoordig de spuigaten uit lopen. Een vriend van mij werkt bij een groot levensmiddelenconcern; nooit 's

avonds en in het weekend te hoeven werken en niet eens zoveel minder vakantie als wij. Daarnaast wordt het onderwijs niet met rust gelaten. Misschien veroorzaakt dat wel de meeste werkdruk. Telkens moet je bezig met verandering en vernieuwing. Dat maakt een docent onzeker en dat ervaart hij vaak als werkdruk. Eigenlijk zou een docent elke week een dag vrijgeroosterd moeten zijn om vakliteratuur bij te werken of zijn



bureau eens op te ruimen.
Het valt me trouwens op dat vooral wiskundedocenten gevoelig zijn voor hoge werkdruk.

Heb je daar een verklaring voor?
Het zou kunnen zijn dat wiskundigen eenvoudig te enthousiasmeren zijn. Per slot van rekening werk je aan het kolossale bouwwerk van het menselijk vernuft dat wiskunde heet. Ik denk ook dat wij wiskundedocenten gezegend zijn met kwalitatief hoogwaardige onderwijsontwikkelinstituten. Daar gaat natuurlijk ook een motiverende werking van uit.
Ik denk dat je jezelf niet gek moet laten maken. Jij weet als docent het beste wat je je leerlingen meegeeft.

Ik heb je ook wel eens horen praten over meer openheid in de school. Wat bedoel je daarmee?
Ik denk dat succes met de Tweede Fase staat of valt met een open schoolcultuur. Docenten hebben de neiging om de gang van zaken in hun klas tot in de finesses te willen beheersen. Huiswerkcontrole, sommen voordoen, uitwerkingen kopiëren voor de leerlingen, enzovoorts. In het studiehuis moet je de leerling meer vrij laten en niet te bang zijn voor problemen. Vaak lossen die zich vanzelf op. Zo schenk je de leerling het vertrouwen dat ze het zelfstandig kunnen doen en ontstaat er meer openheid in de relatie tussen leerling en docent.

Maar niet elke docent zal dat aandurven en men zal zich onzeker voelen.
Dat klopt wel. Ook ikzelf had moeite om leerlingen die vrijheid te geven. Wat mij geholpen heeft is de leerstof te structureren. We hebben een globale planning gemaakt voor de hele wiskundestof in de bovenbouw en dat per jaar en toen per week uitgeschreven. Dat geeft mij als docent een stuk houvast.

Heb je nog meer voorbeelden van die openheid?
Ja. Maak gebruik van de kennis die een leerling al heeft. Leerlingen weten meer dan je denkt. Alleen is hun kennis erg geïsoleerd en zien ze nog geen verbanden met andere kennisgebieden. Dat leren inzien is jouw taak als docent. Maar jij kunt heel goed leren van de leerling. In leerlingwerkstukken staan vaak bewonderenswaardig interessante dingen. Alleen moet je als docent wel bereid zijn te erkennen dat een leerling op sommige terreinen meer weet dan jij. Vooral voor een vak als informatica geldt dit.

We hebben het nog niet echt over het vak wiskunde gehad. Op de studiedag van de NVvW, die afgelopen zaterdag plaats vond, heb ik een workshop over praktische opdrachten gevolgd. Wat mij opviel is dat sommige aanwezigen zoveel “beren op de weg zagen”.
Ach ja, volgens mij moet je praktische opdrachten zien als de vervol-

making van de oorspronkelijke HEWET- en HAWEX-plannen. Ook toen was er al sprake van zelfondekkend leren, maar dat kon niet goed getoetst worden in een centraal eindexamen. Nu de praktische opdrachten substantieel deel uit maken van het examen, is er eindelijk gelegenheid om de oorspronkelijke doelstellingen van HEWET en HAWEX te toetsen. Ik hoop dat de staatssecretaris in haar plannen de werkdruk van leerlingen te verminderen de praktische opdrachten overeind houdt.

Hoe hebben jullie die praktische opdrachten opgezet?
We geven drie opdrachten per jaar. De eerste twee kosten 10 slu's en de laatste 20. De eerste opdracht is het meest gestructureerd en de laatste het meest open. Die laatste opdracht doen we volgens richtlijnen met groepswerk, tussentijdse beoordelingen en een afsluitende presentatie van een kwartier per groep.

Bied je leerlingen de gelegenheid om in de les aan de praktische opdracht te werken?
Ja, gedurende de praktische opdracht mogen de leerlingen in de lessen van één week aan de opdracht werken. Daarnaast hebben ze nog twee weken de tijd buiten de lessen om. Het valt mij op dat leerlingen al gauw meer tijd willen besteden aan de opdracht dan dat er voor gepland is. Ik moet ze nadrukkelijk wijzen op de studielast van een opdracht, anders gaan ze er over heen.

Hoe kom je aan onderwerpen voor een praktische opdrachten?
Op Internet is het nodige materiaal te vinden. Ook krijg ik met zekere regelmaat een tijdschrift onder ogen dat krantenartikelen bevat die tot praktische opdracht kunnen worden omgewerkt. Het gaat daar trouwens wel vaak over statistiek. Voor een meer gestructureerde opdracht is het mogelijk van een gewone contexstopgave de onderdelen a, b, enzovoorts weg te laten en je te beperken tot de vraag die meestal op het einde staat.

Maar dan loop je toch het risico dat je, omdat je het antwoord al kent, de leerlingen bewust of onbewust die richting opstuurt en geen ruimte geeft aan andere richtingen?
Daartoe moet je je niet laten verleiden. Met een open instelling is dat risico veel kleiner.

Je had het net over Internet. Maak je daar veel gebruik van?
Ja, bijvoorbeeld om inspiratie op te doen voor onderwerpen. Wat ik ook nog wel eens doe, is bij begeleiding van praktisch werk -nu nog vooral in de onderbouw- leerlingen Internetadressen geven waar ze dingen kunnen vinden. Ik beschik inmiddels over een behoorlijke lijst met bookmarks.

Als je de praktische opdrachten van Internet haalt, bestaat de kans dat leerlingen die ook kunnen vinden.
Hoe erg is dat? Internet is zo ontzettend groot en er is zoveel te halen. Een leerling die dat allemaal opgespoord heeft, verdient het om daarvoor beloond te worden.

Je hebt nog geen ervaring met praktische opdrachten. Wat verwacht je er van?
De eerste opdracht is net afgerond. Veel ervaringen kan ik nog niet melden. Wel denk ik dat de praktische opdrachten sterk zullen discrimineren, met name op het gebied van intrinsieke motivatie.

Nu bestaat de Tweede Fase niet alleen uit praktische opdrachten. Hoe doen jullie het verder in vwo 4?
Ik geef twee lesuren van 60 minuten per week. Daarnaast kent de gehele bovenbouw wiskunde een zogenaamd inloopuur.

Van alle opgaven uit het boek komt nauwelijks de helft aan de orde. Ik vind dat je beter een kleine selectie van opgaven uitgebreid kunt behandelen dan een grote selectie minder uitgebreid. Het gaat er vaak traditioneel aan toe. Dat vind ik niet erg. Leerlingen moeten ook leren om te luisteren. Bovendien spreekt het onderwijsleergesprek als werkvorm mij sterk aan.

Ik wil afsluiten met de vraag die jij in de workshop aan ons deelnemers stelde. Hoe ziet het werk van de wiskundedocent er over tien jaar uit?
Je moet je daar geen al te futuristische voorstellingen van maken. Kijk eens tien jaar terug. Is er sinds die tijd veel veranderd? Ja, er zal meer gebruik gemaakt worden van informatietechnologie. Daarbij denk ik vooral aan e-mail, Internet en iets als teleleren (leren op afstand door middel van informatietechnologie - red.). Toch denk ik niet dat deze middelen het klassikale onderwijs zullen verdringen.
Ook verwacht ik dat de docent in 2009 meer selectief zal zijn. Hij zal niet meer alles hoeven te weten en alle processen in een klas hoeven te beheersen.
De inhoudelijke kant van het wiskundeonderwijs zal in tien jaar, denk ik, niet veel veranderen.

Ten slotte hoop ik -en dat is een uitbreiding van je vraag- dat we meer tijd krijgen om collega-wiskundigen te ontmoeten, bijvoorbeeld op studiedagen. Er zou een sterkere wisselwerking moeten zijn tussen leraren in de verschillende sectoren, educatieve uitgevers, onderzoekers en wiskundigen buiten het onderwijs. Wiskundigen aller landen, verenigt u!

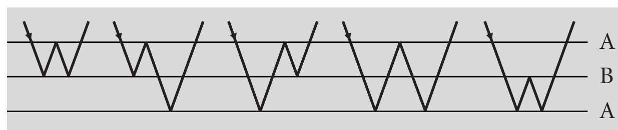
Victor Schmidt

Multinacci rijen

Jacques Haubrich

Inleiding

In de rubriek Recreatie van dit blad[1] publiceerde de puzzelredacteur een probleem dat hij ontleende aan een boek van Erwin Brecher[2]. Het ging om twee glasplaten op elkaar en een schuin invallende lichtstraal. Deze lichtstraal kan zowel op een buitenvlak *A*, als op het binnenvlak *B* weerkaatsen. Figuur 1 geeft alle mogelijke verlopen voor $n = 3$ reflecties.



Figuur 1

De originele puzzel was te onderzoeken hoeveel verschillende verlopen er zijn voor $n = 10$ reflecties. In nummer 4 van dezelfde jaargang[3] werd de oplossing gepubliceerd, waarbij de rij van Fibonacci te voorschijn kwam (1, 1, 2, 3, 5, 8, … ofwel $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ met $a_0 = 1$ en $a_1 = 1$). Sommige inzenders generaliseerden het probleem door meer glasplaten te gebruiken, waarbij nieuwe getallenrijen te voorschijn kwamen:

- Bij 3 glasplaten: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$ met $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 6$
- Bij 4 glasplaten: $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4}$ met $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 10, a_3 = 30$

Volgens de puzzelredacteur leverde geen van de inzenders een bewijs voor de gevonden recursies. Dat vindt u in dit artikel, vergezeld van enkele nevenresultaten.

Een oplossing voor het probleem met twee glasplaten

In figuur 1 is eenvoudig te herkennen dat er na 3 weerkaatsingen $A_3 = 3$ lichtstraalverlopen zijn die als laatste op een *A*-vlak reflecteren en $B_3 = 2$ die als laatste op een *B*-vlak spiegelen. Wanneer we een extra, vierde reflectie toestaan, zullen de eerste 3 verlopen elk 2 nieuwe verlopen genereren: telkens één die de vierde weerkaatsing op het *B*-vlak heeft en één die de vierde weerkaatsing op het andere *A*-vlak heeft. De twee die als laatste op een *B*-vlak weerkaatsten, kunnen alleen worden voortgezet met een vierde weerkaatsing op het *A*-vlak. Daaruit blijkt dat er na 4 weerkaatsingen $A_4 = A_3 + B_3$ zijn die dan als laatste op een *A*-vlak spiegelen en $B_4 = A_3$ die dan als laatste op een *B*-vlak spiegelen. Voor het totale aantal weerkaatsingen t_4 geldt dan dat $t_4 = A_4 + B_4$.
Zeker als we één en ander uitschrijven, beginnend bij 0 weerkaatsingen, komt alras de volgende tabel te voorschijn, waarin we zowel voor A_n als voor t_n de rij van Fibonacci herkennen:

n	0	1	2	3	4	5	6
A_n	1	1	2	3	5	8	…
B_n	0	1	1	2	3	5	…
t_n	1	2	3	5	8	13	…

Een 'bewijs' zou dus kunnen zijn:
als $A_n = A_{n-1} + B_{n-1}$ en $B_n = A_{n-1}$, dan is $B_{n-1} = A_{n-2}$ en een eenvoudige substitutie levert de bekende recurrente betrekking $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$.
En dus ook $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ immers $t_{n-1} = A_n$.
Gezien de manier waarop A_n en B_n zijn afgeleid als functies van A_{n-1} en B_{n-1} is het echter veel aardiger, deze afhankelijkheid als volgt te schrijven:

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

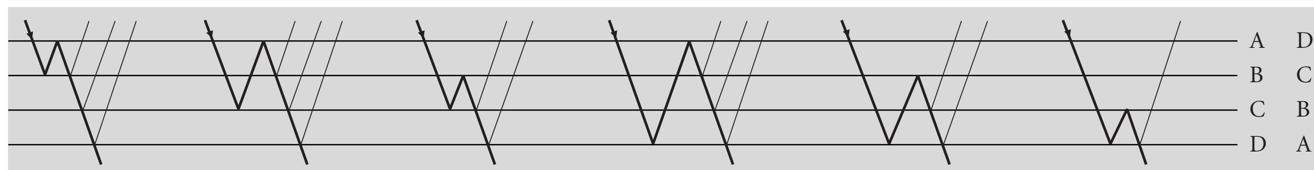
Want hieruit volgt met wat lineaire algebra dat A_n en B_n kunnen worden uitgedrukt in de *n*-de macht van de eigenwaarden van deze matrix, vermenigvuldigd met de juiste componenten van de eigenvectoren. De belangstellende lezer verifiëre zelf dat dit resulteert in de bekende expliciete formule voor de Fibonacci getallen:

$$F_n = \frac{\phi_1^{\,n} - \phi_2^{\,n}}{\sqrt{5}} \quad \text{met}$$

$$\phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{en} \quad \phi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Generalisatie naar meer glasplaten

Bij 3 glasplaten krijgen we het volgende beeld:



Figuur 2

De zes getekende verlopen zijn precies alle mogelijkheden bij $n = 2$ reflecties in $m = 3$ glasplaten. De stippellijnen geven voor elke situatie de mogelijkheden voor een derde reflectie. Als de vlakken waarop weerkaatst kan worden van boven naar beneden worden aangeduid met *A*, *B*, *C*, *D*, dan zien we opnieuw dat een verloop dat bij 2 reflecties als laatste op de *A*-laag kwam, drie nieuwe verlopen genereert, één vanuit de *B*-laag, een vanuit de *C*-laag en een vanuit de *D*-laag. Een verloop dat op de *B*-laag eindigde geeft slechts twee nieuwe voortzettingen, namelijk via de *C*-laag of via de *D*-laag. Voor het beschrijven van het proces blijkt het echter handiger te zijn, de nieuwe verlopen, die dus in tegengestelde richting eindigen, ook aan te duiden met de 'tegengestelde' letters, zoals in figuur 2 geheel rechts is aangegeven.
Het gehele gedrag bij deze drie glasplaten blijkt nu te kunnen worden beschreven op een wijze die sterk lijkt op de boven gegeven beschrijving bij 2 glasplaten, namelijk:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A_n	1	1	3	6	14	31	70	157	353
	met $A_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}$								
B_n	0	1	2	5	11	25	56	126	283
	met $B_n = A_{n-1} + B_{n-1}$								
C_n	0	1	1	3	6	14	31	70	157
	met $C_n = A_{n-1}$								

Zowel de beginwaarden als de juistheid van de drie recursies volgen direct uit figuur 2 en de toelichting. Optellen van de *A*-, *B*- en *C*-waarden geeft weer de *A*-rij, één positie naar links geschoven. Analoog als hiervoor bij 2 glasplaten is voorgedaan, kan men afleiden dat:
$A_n = 2 \cdot A_{n-1} + A_{n-2} - A_{n-3}$ en dus ook weer $t_n = 2 \cdot t_{n-1} + t_{n-2} - t_{n-3}$ omdat weer $t_{n-1} = A_n$, hetgeen exact de recurrente betrekking is die in Euclides[3] zonder bewijs werd gepubliceerd.

Door naar vier glasplaten

Met vier glasplaten komen we op geheel analoge wijze tot het schema:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_n	1	1	4	10	30	85	246	707	2037	5864
	met $A_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1} + D_{n-1}$									
B_n	0	1	3	9	26	75	216	622	1791	5157
	met $B_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}$									
C_n	0	1	2	7	19	56	160	462	1329	3828
	met $C_n = A_{n-1} + B_{n-1}$									
D_n	0	1	1	4	10	30	85	246	707	2037
	met $D_n = A_{n-1}$									

Enige substituties resulteren in de formule
$A_{n+1} = t_n = 2 \cdot t_{n-1} + 3 \cdot t_{n-2} - t_{n-3} - t_{n-4}$

Op allerlei manieren, onder andere via de eigenwaarden en eigenvectoren van de bijbehorende matrix, is het in beginsel mogelijk uit zo'n recurrente betrekking een expliciete formule voor de *n*-e term van elke rij af te leiden. Helaas wordt het benodigde rekenwerk al spoedig tamelijk onaangenaam. Het afleiden van soortgelijke recurrente betrekkingen voor elk willekeurig aantal glasplaten is echter een koud kunstje.

Multinacci rijen

Als u mij de vrijheid toestaat, de getallenrijen voor *m* glasplaten aan te duiden met $M_m(n)$ waarbij de letter *M* staat voor 'Multinacci', dan zijn deze Multinacci rijen te beschrijven als het eerste kental van een *m*-dimensionale vector $v_m(n)$ waarbij: $M_m(0) = 1$ het eerste kental is van de *m*-dimensionale eenheidsvector $v_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, en de volgende elementen worden verkregen uit $v_m(n) = R \cdot v_m(n-1)$ of $v_m(n) = R^n \cdot v_m(0)$.
De bijbehorende $m \times m$ matrix *R* is daarbij gedefinieerd als: $R_{i,j} = 1$ ingeval $i < m + 2 - j$ en $R_{i,j} = 0$ ingeval $i > m + 1 - j$.

Voor $m = 2$, resulteert dit in de normale Fibonacci rij, voor grotere waarden van m ontstaan de beschreven Multinacci rijen.
Als recursie geschreven, zien deze Multinacci rijen er als volgt uit:

$m = 1: \; a_n = a_{n-1}$

$m = 2: \; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$m = 3: \; a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$

$m = 4: \; a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4}$

$m = 5: \; a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2} - 4 \cdot a_{n-3} - a_{n-4} + a_{n-5}$

$m = 6: \; a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 6 \cdot a_{n-2} - 4 \cdot a_{n-3} - 5 \cdot a_{n-4} + a_{n-5} + a_{n-6}$

$m = 7: \; a_n = 4 \cdot a_{n-1} + 6 \cdot a_{n-2} - 10 \cdot a_{n-3} - 5 \cdot a_{n-4} + 6 \cdot a_{n-5} + a_{n-6} - a_{n-7}$

enzovoorts.

Helaas moeten bij deze recursiemethode voor elke waarde van m meteen de eerste m getallen gegeven worden; de matrixdefinitie is wat dat betreft duidelijk in het voordeel omdat daar telkens slechts de eerste eenheidsvector als begin nodig is.
De coëfficiënten in bovenstaand schema vormen een soort driehoek van Pascal. Ditmaal zien we echter afwisselend twee positieve en twee negatieve getallen. Elk getal blijft ook twee regels lang staan om vervolgens te worden vervangen door afwisselend de som en het verschil van de twee getallen erboven. Alle getallen in deze driehoek zijn daardoor vanzelf binomiaalcoëfficiënten. Een bewijs dat deze getallen steeds de som of het verschil van hun voorgangers zijn, is misschien niet eens zo moeilijk, maar voor ondergetekende dwaalde dat te ver af van het oorspronkelijke probleem.

Bekende getallenrijen?

De ontstane Multinacci-rijen blijken niet nieuw. In het vermaarde rijenhandboek 'The Encyclopedia of Integer Sequences' [4] staat de M_3 rij genoteerd onder nummer 2578, rij M_4 onder nummer 3396, rij M_5 als nummer 3862 en rij M_6 als nummer 4148. M_7 en volgende worden niet meer vermeld. Bij al deze rijen staat als toelichting "Distributive lattices", een onderwerp dat in ons voortgezet onderwijs meestal niet wordt behandeld, alsmede een verwijzing naar zowel een Franse als een Duitse bron. Beide bronnen bleken helaas dermate moeilijk toegankelijk, dat pogingen daartoe moesten worden gestaakt.

Verder onderzoek

Met in eerste instantie lichte verbazing kon ik vaststellen dat bij de hiervoor behandelde 2-dimensionale matrix R maar beginnend met de vector (1, 3), de bijna even bekende rij van Lucas getallen ontstaat. Sterker nog: elke willekeurige getallenrij waarbij de recursie $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ van kracht is, wordt met dezelfde matrix en een geschikte beginvector verkregen.
Een analoog verschijnsel treedt op bij de Multinacci rijen van hogere orde. De variatie wordt daar wel wat groter, want de rij M_3 blijkt nu ook met verschillende matrices te kunnen ontstaan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en ook met:} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beide matrices hebben dezelfde eigenwaarden, hetgeen uiteraard vereist is. Maar de twee vectoren zijn totaal verschillend, zij het dat het eerste kental steeds hetzelfde is. Dat lijkt hoogst verwonderlijk, al zal daar vast wel een verklaring voor zijn.

Referenties

1 **Euclides**, september 1997, jaargang 73, nummer 1, p. 34
2 *Erwin Brecher*, **Surprising Science Puzzles**, 1995, ISBN 0-8069-0698-7
3 **Euclides**, januari 1998, jaargang 73, nummer 4, p. 143
4 *N.J.A. Sloane and Simon Plouffe*, **The Encyclopedia of Integer Sequences**, Academic Press, 1995

bespreking

A.W. Grootendorst
Jan de Witt. Elementa curvarum linearum. Liber primus.
Tekst, vertaling, inleiding en commentaar door
A.W. Grootendorst
Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1997
287 p., prijs ƒ 50,- (pb) (CWI Publications)
ISBN 90-6196-472-5

Latijn in de wiskundeles

In 1637 publiceerde René Descartes (1596-1650) *La Géometrie* en legde daarmee de grondslag voor de analytische meetkunde. Voor de verspreiding ervan is Frans van Schooten de Jongere (1615-1661) waarschijnlijk belangrijker geweest. Hij ontsloot het werk voor de hele geleerde wereld van die tijd door het in het Latijn te vertalen. Bovendien schreef hij een uitvoerig commentaar bij het moeilijk toegankelijke werk. De eerste editie van *Géométria, a Renato Des Cartes* publiceerde Van Schooten in 1649. Een tweede editie verscheen in twee delen in 1659 en 1661 en was nog omvangrijker. Daarin had hij bijdragen opgenomen van zijn leerlingen, waaronder Christiaan Huygens, Jan Hudde en Jan de Witt. De bijdrage van Jan de Witt (1629-1672) heette *Elementa curvarum linearum* en bestond op haar beurt weer uit twee delen, *Liber primus* en *Liber secundus*.
Liber secundus van *Elementa curvarum linearum* wordt wel het eerste leerboek van de analytische meetkunde genoemd. Hierin liet De Witt zien hoe algebraïsche vergelijkingen parabolen, hyperbolen en ellipsen voorstellen. Dergelijke kegelsneden worden beschreven door coördinaatparen, wanneer deze voldoen aan vergelijkingen waarvan de graad niet hoger is dan twee. Daarnaast leidde De Witt af dat deze coördinaatparen voldoen aan de karakteristieke eigenschappen van deze kegelsneden. Hierbij baseerde hij zich op wat hij in *Liber primus* had uitgewerkt. Daarin definieerde hij kegelsneden door voorschriften die geheel in het platte vlak uitgevoerd kunnen worden, dus zonder gebruik te maken van een kegel. Bovendien leidde hij de kenmerkende eigenschappen van parabool, ellips en hyperbool af. Dat deed hij echter niet met behulp van analytische meetkunde, maar op traditioneel synthetische manier.
Elementa curvarum linearum is nu door A.W. Grootendorst in het Nederlands vertaald, ingeleid en becommentarieerd. Dat wil zeggen, de vertaling van *Liber primus* is verschenen, die van *Liber secundus* is in voorbereiding. Of dat slim is - de vertaler noemt het tweede boek niet voor niets de kern van *Elementa curvarum linearum* - laat ik in het midden. Wij mogen tevreden zijn met de uitgave die nu beschikbaar is. De vertaling is correct, de inleiding terzake en het commentaar verhelderend, kritiek op details daargelaten. Als historische uitgave is het boek een verrijking en, voor degenen die geïnteresseerd zijn in de geschiedenis van de wiskunde, de moeite zeker waard. Men kan hier kennismaken met een wiskundig denken dat typisch is voor de tijd waarin zij ontstond. De Witt definieert krommen door snijpunten van lijnen die in het platte vlak schuiven en draaien. Bijvoorbeeld de ellips: deze wordt voortgebracht door een willekeurig punt op een lijnstuk waarvan de uiteinden langs twee rechten bewegen. Het zijn procedures die je zou kunnen vertalen in een mechaniek, wat dan ook vaak gedaan werd.
De belangrijkste reden om het op deze plaats te bespreken is een suggestie die Grootendorst in het voorwoord doet. Het lijkt hem de moeite waard om De Witt's tekst op het vwo te gebruiken bij een experiment in het kader van de Tweede Fase. Daarin zou kennis van het Latijn gecombineerd kunnen worden met kennis van de wiskunde. Er is veel voor zijn suggestie te zeggen. Ik denk dat het belangrijk is dat leerlingen ook in aanraking komen met de historische ontwikkeling van de wiskunde. Daarbij verdient het gebruik van bronteksten de voorkeur boven secundaire literatuur. En ook het idee spreekt mij aan om bij de behandeling van zo'n tekst niet alleen bezig te zijn met wiskunde maar ook met de taal waarin die opgeschreven is.
Een tekst als die van De Witt biedt mooie kansen de ideeën achter de Tweede Fase handen en voeten geven. Een stukje geschiedenis van de wiskunde - in de vorm van een brontekst - kan gebruikt bijvoorbeeld worden als uitgangspunt voor een zogenaamde praktische opdracht. Daarnaast biedt het mogelijkheden voor het befaamde profielwerkstuk. Naast de genoemde combinatie van wiskunde en talen, zijn er tal van mogelijkheden wiskunde via de geschiedenis met de andere exacte vakken te combineren. Mijns inziens kan de historische ontwikkeling van de wiskunde op die manier de wiskundige kennis van de leerling verdiepen en in een breder (profiel)verband plaatsen.
Daarvoor moet zo'n stukje geschiedenis wel aan voorwaarden voldoen. Het moet de wiskunde die de leerlingen leren ten goede komen en de inhoud moet dus op zijn minst aan het programma gerelateerd zijn. Bovendien - en dat is bij historische teksten lang niet altijd eenvoudig - moet de wiskunde begrijpelijk zijn. Ten slotte moet de historische kant ervan toegankelijk gemaakt worden. Een vertaling van bronteksten, inleiding en commentaar waarin de inhoud en histo-

rische context uitgelegd wordt, en zo mogelijk opdrachten om de bestudering richting te geven. Gelukkig is er reeds allerlei materiaal voorhanden - niet in de laatste plaats door inspanningen van Grootendorst zelf - waarmee geschiedenis een plaats binnen de Tweede Fase kan krijgen.
Of *Elementa curvarum linearum. Liber primus* de meest aangewezen tekst is om op het vwo te gebruiken, betwijfel ik. Het onderwerp en de wiskundige denkwijze van de tekst liggen mijns inziens te ver af van de wiskunde die op het vwo geleerd wordt. Bovendien bevordert de letterlijke vertaling van het Latijn de toegankelijkheid van de tekst niet. Voor de historisch geïnteresseerde docent is de uitgave van Grootendorst echter zeer de moeite waard.

Fokko Jan Dijksterhuis

Aankondiging

Regionale ICT-Onderwijs Dagen

In de maanden maart en april 1999 houdt het Procesmanagement ICT zes Regionale ICT-Onderwijs Dagen. De dagen zijn bedoeld voor leraren, ICT-coördinatoren en schoolleiders uit primair en voortgezet onderwijs, landbouwonderwijs en de BVE-sector. Ze zijn tevens bestemd voor personen verbonden aan lerarenopleidingen en onderwijsbegeleidingsdiensten. Doel van de bijeenkomsten is om de onderlinge samenwerking tussen scholen uit alle sectoren te bevorderen, waar het de invoering van ICT betreft. De Regionale ICT-Onderwijs Dagen worden parallel aan de School & Computer-beurzen georganiseerd in de plaatsen Groningen, Eindhoven, Zwolle, Amsterdam, Nijmegen en Rotterdam.

Regionale netwerken

De bedoeling van de Regionale ICT-Onderwijs Dagen is dat door het over en weer uitwisselen van kennis tussen scholen, regionale netwerken ontstaan. De dagen zijn daarom opgezet voor en door scholen. Ze bieden aan ICT-voorhoedescholen de gelegenheid om onderling ervaringen uit te wisselen, maar zijn vooral bedoeld om contacten tot stand te brengen tussen voorhoede- en volgscholen. Daarnaast is binnen elke onderwijssector specifieke kennis aanwezig op het gebied van ICT, waar ook andere sectoren hun voordeel mee kunnen doen. Om een voorbeeld te noemen: een school voor voortgezet onderwijs die op zoek is naar remediërende programma' s voor leerlingen met een taalachterstand, zou advies kunnen vragen aan een basisschool die daar ervaring mee heeft. Niet alleen de hard- en software spelen een rol bij dergelijke vraagstukken, maar zeker ook de 'humanware', met aandacht voor het didactische proces bij het gebruik van ICT.

Plaatsen en data

De Regionale ICT-Onderwijs Dagen vinden gelijktijdig plaats met de School & Computer-beurzen. Naast het aanbod van presentaties, ronde-tafelgesprekken en workshops is beursbezoek als programma-onderdeel opgenomen. De bijeenkomsten vinden plaats op de volgende data: 17 maart in de Martinihal in Groningen, 24 maart in het Evoluon in Eindhoven, 31 maart in de Buitensociëteit in Zwolle, 7 april in het RAI Congrescentrum in Amsterdam, 14 april in het Triavium in Nijmegen en 21 april in het Erasmus Expo- en Congrescentrum in Rotterdam.

Aanmelden

Belangstellenden kunnen zich opgeven voor een van de Regionale ICT-Onderwijs Dagen door het inschrijfformulier in te vullen dat binnenkort op alle scholen verschijnt.
Inschrijving is tevens mogelijk via de website
www.ess.nl.
Telefonisch een inschrijfformulier aanvragen is ook mogelijk:
050 - 5277504

Informatie

Meer informatie over de Regionale ICT-Onderwijs Dagen en over School & Computer staat op de website van ESS: www.ess.nl.

Informatie over het Procesmanagement ICT in het onderwijs is beschikbaar op de websites:
www.ictonderwijs.nl en www.kennisnet.nl

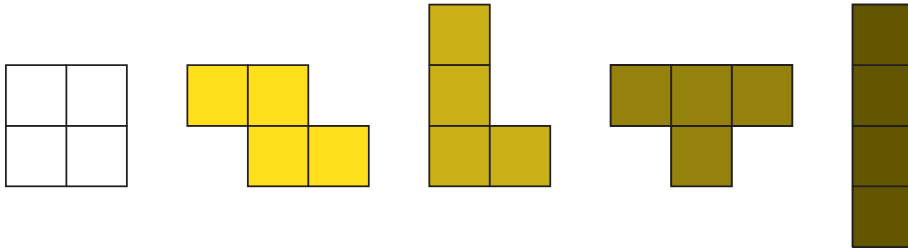


naam:
straat:
postcode: plaats:
telefoon:
bestelt .... exemplaren van de Wiskundekalender 1999.

Opsturen naar: Vierkant voor Wiskunde, faculteit der exacte wetenschappen, Vrije Universiteit, de Boelelaan 1081a, 1081HV Amsterdam (e-mailen mag ook : e-mailadres: Vierkant@cs.vu.nl) Na ontvangst van de betaling (fl. 25,-- per kalender op bankrekening 438634926 t.n.v. stichting Vierkant, Amsterdam) wordt uw bestelling toegezonden.

Tetro-mino's

Tetromino's zijn figuren die zijn opgebouwd uit 4 vierkantjes van dezelfde grootte. Elk vierkantje zit met minstens één zijde aan de zijde van een ander vierkantje vast. Er zijn in totaal vijf verschillende tetromino's:



Ze heten achtereeenvolgens O-, Z-, L-, T- en I-tetromino.
We zullen deze week onderzoeken of bepaalde rechthoekige borden overdekt kunnen worden met een vast type tetromino's. De rechthoekige borden bestaan uit vierkantjes die even groot zijn als de vierkantjes van de tetromino's. De tetromino's mogen elkaar niet overlappen. Een bord met ***a*** rijen en ***b*** kolommen noemen we een ***a***x***b***-bord.

MAANDAG 21 JUNI

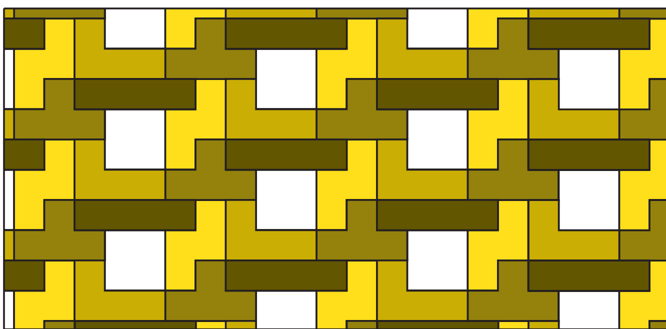
Overdek een 2x4-bord en ook een 3x8-bord met L-tetromino's

WOENSDAG 23

Waarom kan geen enkel rechthoekig bord overdekt worden met Z-tetromino's?

VRIJDAG 25

Stel dat een bord overdekt kan worden met T-tetromino's. Toon aan dat het aantal velden van het bord deelbaar is door 8.



ZATERDAG 26

Waarom kun je een 8x8-bord niet overdekken met één O-tetromino en 15 L-tetromino's?

DINSDAG 22

Beredeneer dat een ***a***x***b***-bord overdekt kan worden met L-tetromino's als ***a*** even en ***b*** deelbaar door 4 is.

DONDERDAG 24

Waarom kan een 10x10-bord niet overdekt worden met L-tetromino's? (Maak slim gebruik van de dambordkleuring.)

ZONDAG 27

Toon aan dat een ***a***x***b***-bord, waarbij $a \geqslant 2$ en $b \geqslant 2$, overdekt kan worden met L-tetromino's als ***ab*** deelbaar is door 8.

De stichting Vierkant voor Wiskunde geeft voor 1999 weer een wiskundekalender uit. Deze werd opnieuw samengesteld door Frits Göbel en Rinus Roelofs.

Frits Göbel is wiskundige en fanatiek puzzelaar.
Hij verzamelde de 365 opgaven. Deze opgaven zijn naar thema ingedeeld. Elke week wordt het thema uitgelegd, de oplossingen van de opgaven verschijnen op de home page van de stichting:
http://www.cs.vu.nl/~vierkant

Rinus Roelofs is een door wiskunde geïnspireerd kunstenaar. Hij deed de vormgeving van de kalender. De illustraties met als jaarthema "betegelingen" zijn grotendeels afkomstig uit zijn eigen werk.

De kalender verschijnt begin november. Hij kost 25 gulden (108 pagina's, formaat 21 x 24 cm. De hiernaast afgebeelde pagina's zijn op 2/3 van de ware grootte afgebeeld) en is verkrijgbaar bij de stichting.



Vierkant voor wiskunde
faculteit der exacte wetenschappen
Vrije Universiteit
de Boelelaan 1081a
1081HV Amsterdam
tel: 020 - 4447776
e-mail: Vierkant@cs.vu.nl

SchoolNET-website België

Luc Vercoutter

Inleiding

De SchoolNET-website is een referentiesite van, voor en over het Nederlandstalig onderwijs.
Hierin richt SchoolNET zich vooral naar directieleden, leerkrachten, leerlingen en ouders. Geïnteresseerden in de onderwijswereld kunnen op deze site heel wat interessante informatie vinden.

Doel en basisprincipe

Het doel is:
- systematisch overzicht geven van de educatieve sector;
- mensen die dagelijks met educatieve activiteiten bezig zijn dichter bij elkaar brengen en hen informatie op een elektronische wijze laten uitwisselen;
- informatie vanuit de bedrijfswereld vlotter, efficiënter en vooral effectiever naar de educatieve sector laten doorstromen.

De basisprincipes zijn:
- volledig a-politiek;
- probeert zoveel mogelijk informatie in het Nederlands te brengen.
- educatieve informatie verzamelen en op een gestructureerde manier aanbieden.

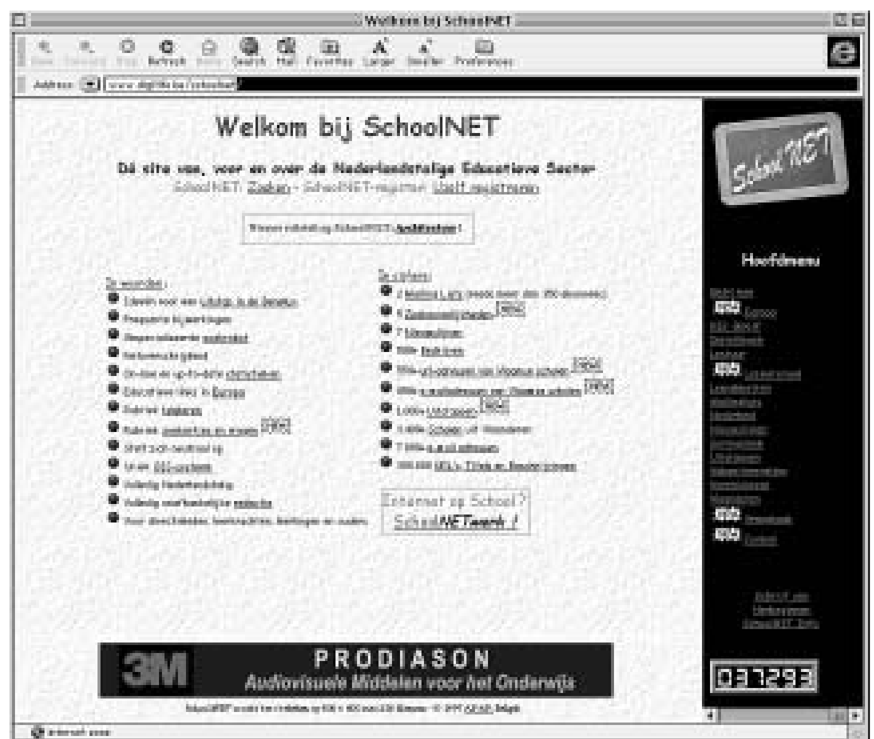
Rubrieken

Om het zoeken op de SchoolNET-website te vergemakkelijken is de informatie onderverdeeld in verschillende rubrieken. Deze rubrieken bevatten heel wat basisinformatie over bedrijven die interessante producten aan de onderwijssector aanbieden, plaatsen die vanuit educatief en algemeen toeristisch standpunt interessant zijn om te worden bezocht door klassen of groepen, tijdschriften van, voor en over de educatieve sector, enzovoort. Deze verschillende rubrieken zijn te consulteren via een menu-systeem. Dit menu-systeem verschijnt rechts in beeld. Het is een unieke navigator die de gebruiker van SchoolNET toelaat vlot doorheen de webstek te surfen.

"Bedrijven": audiovisuele middelen, didactische hulpmiddelen, educatieve software, informatica, schoolmeubilair, uniformen of verkoopautomaten

"Europa": voor degenen die op zoek zijn naar educatieve sites in het buitenland.

"GIS-systeem" en de **"Uitstappen-databank"**: hier kunt u opgevraagde informatie op kaart zien en doet u heel wat ideeën op om een uitstapje te maken met de klas.



"Instellingen": een databank over Vlaamse (en Europese) scholen. Omdat SchoolNET zich neutraal opstelt en netoverschrijdend werkt, zult u er informatie vinden van uiteenlopende strekkingen. Zo zult u er zowel de gemeenteschool uit uw dorp terugvinden als het college of atheneum uit de stad.
"Lectuur": deze rubriek bevat o.a. zoekrobots om op zoek te gaan naar bibliotheken en uitgeverijen. U vindt er ook een tijdschriftenlijst, boekbesprekingen, elektronische magazines, enz.

"Lesmateriaal": cursussen over diverse vakgebieden. Er wordt tevens aandacht besteed aan "teleleren": een nieuwe vorm van lesgeven.

"Lespakketten" geeft een overzicht van de lespakketten die verschillende organisaties aanbieden.

"Nieuwslijnen": hierin wordt u op de hoogte gehouden van de laatste nieuwtjes in de onderwijswereld. Door u te abonneren op de elektronische nieuwsbrief "SchoolNET-info" kunt u deze informatie via email gratis ontvangen. Het abonneren kan gebeuren via de rubriek **"Mailinglists"**.

"Springplank" biedt heel wat interessante links per vak.

"Vraagbaak" is de nieuwe succesvolle rubriek waarin men zoekertjes kan plaatsen en vragen kan stellen.

"Edu-Index": de zoekmachine van SchoolNET helpt u op een snelle manier bij het zoeken naar heel wat Nederlandstalige educatieve websites over een bepaald onderwerp.

Kortom

Alles wat te maken heeft met onderwijs vindt zijn plaats op deze site. Het is in feite te veel om op te noemen. Ga daarom zelf eens een kijkje nemen op het Internet. Het loont de moeite.
Bezoek de SchoolNET-website

http://www.digilife.be/schoolnet

40 jaar geleden

1133

a Bewijs dat twee lichaamszwaartelijnen van een viervlak elkaar verdelen in stukken die zich verhouden als 1 en 3 en dat de vier lichaamszwaartelijnen door één punt gaan.

b Een punt P doorloopt de ribbe CD van viervlak $ABCD$. Bepaal de meetkundige plaats van de zwaartepunten van de viervlakken $ABPD$.

(H.B.S.-B, 1958)

1134

Van de piramide $TABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een rechthoekig trapezium, waarvan $AB = 8$, $AD = 2\sqrt{3}$, $CD = 2$, $\angle A = 90^0$ en $\angle D = 90^0$; de ribbe TA staat loodrecht op het grondvlak en $TA = 6$. Een bol heeft TC als middellijn.

a Bewijs, dat deze bol door A en D gaat.
b Bereken de lengten van de delen, waarin deze bol de ribben AB en TB verdeelt.
c Bewijs, dat BC de bol raakt.

(Gymn., 1958)

1136

In de scherphoekige driehoek ABC zijn AD en BE hoogtelijnen. De rechten DE en AB snijden elkaar in S. Gegeven is, dat $SE : ED = 1 : 2$.

a Bewijs, dat $\sin 2\beta = 3 \sin 2\alpha$.
b Gegeven is ook nog, dat tg $\gamma = 2$. Bereken α en β.

(Gymn., 1958)

Opgaven uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 46 (1958-1959)

Werkblad

Opgave 2 Afbraak van penicilline

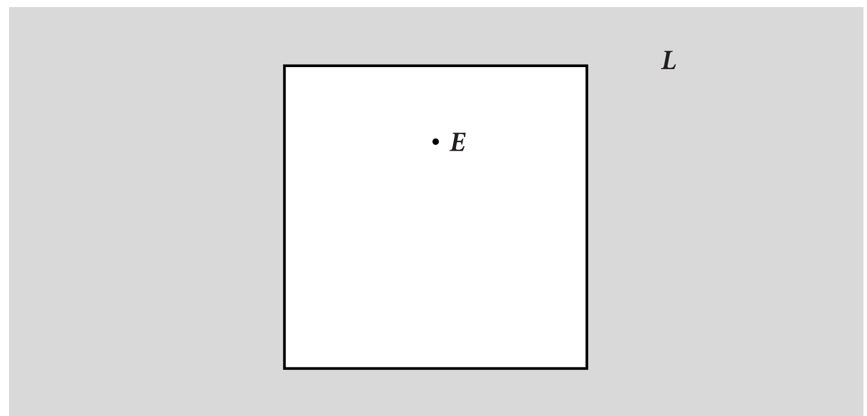
Ter bestrijding van een infectie begint een patiënt aan een penicilline-kuur die bestaat uit het innemen van pillen. Iedere keer na het innemen van een pil stijgt de concentratie penicilline in het bloed met 350 000 eenheden per milliliter. Aan het begin van de kuur zit er geen penicilline in het bloed van de patiënt. De penicilline wordt afgebroken met een snelheid die evenredig is met de concentratie:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\,0.3\,P$$

Hierbij is t de tijd (in uren) en P de concentratie penicilline (in eenheden per milliliter). De concentratie penicilline mag niet onder de 100 000 eenheden per milliliter komen.

8p **2** ☐ Bereken hoeveel uur na het innemen van de eerste pil de tweede, derde en vierde pil moeten worden ingenomen. Geef je antwoorden in gehele uren.

In onderstaande figuur zie je een vierkant met zijde 8 en een punt *E* dat respectievelijk de afstanden 2, 4, 6 en 4 tot de zijden van het vierkant heeft. De punten die buiten of op het vierkant liggen vormen een gebied *L*.



De verzameling van alle punten die even ver liggen van het punt *E* als van het gebied *L* wordt de conflictlijn van *E* en *L* genoemd.

6p **3** ☐ Teken in de figuur hierboven de conflictlijn van *E* en *L* en beschrijf welke vorm de verschillende delen van de conflictlijn hebben.

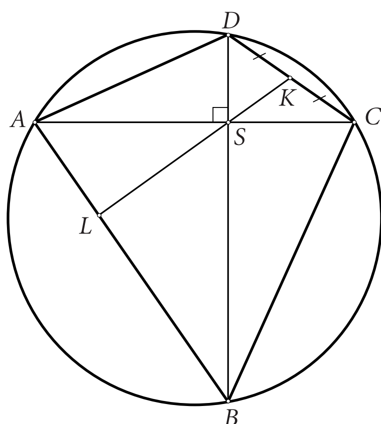
5p **4** ☐ Bewijs dat de conflictlijn niet overal glad is.

Uit het examen vwo Wiskunde B Profi tijdvak 1, mei 1998

Werkblad

Opgave 6 Een stelling over bijzondere koordenvierhoeken

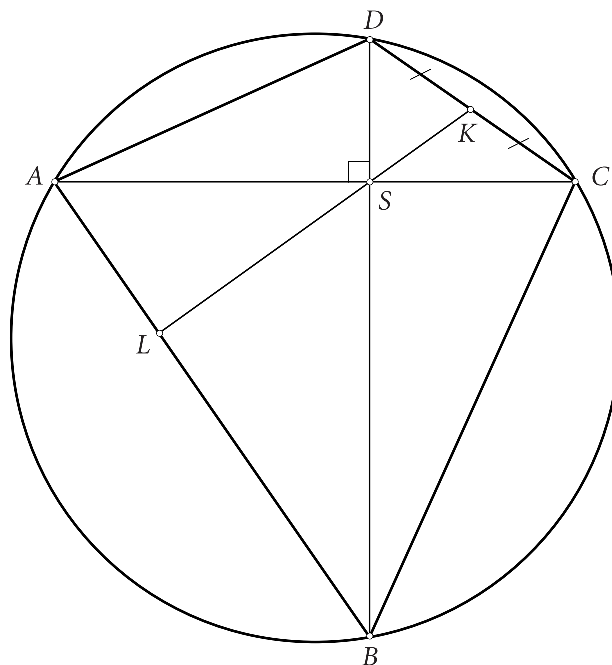
Dit vraagstuk gaat over een stelling van de Indische wiskundige Brahmagupta die leefde in de zevende eeuw. De stelling luidt:
Als van een koordenvierhoek de diagonalen elkaar loodrecht snijden in S, dan staat de lijn die het midden van een zijde met S verbindt loodrecht op de overstaande zijde.



In de figuur zie je een koordenvierhoek *ABCD* waarvan de diagonalen *AC* en *BD* elkaar loodrecht in *S* snijden.
Het punt *K* is het midden van zijde *CD*.
Het snijpunt van *KS* en *AB* is *L*.
Hiernaast staat figuur 5 groter afgebeeld.

7p **9** ☐ Bewijs eerst dat geldt: $\angle ASL = \angle KCS$.

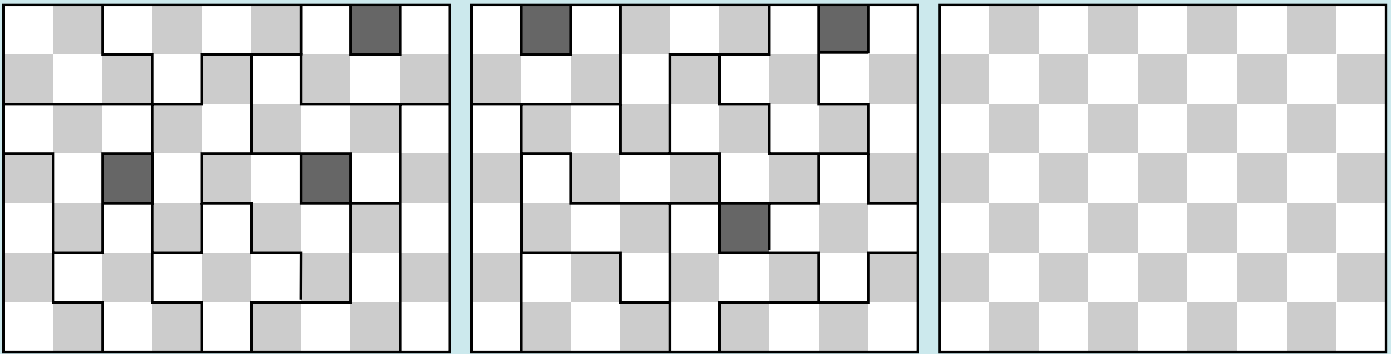
7p **10** ☐ Bewijs vervolgens dat *KL* loodrecht staat op *AB*.



Uit het examen vwo Wiskunde B Profi tijdvak 1, mei 1998

Recreatie

Opgave 690



Als verzamelaar van wiskundige puzzeltjes en spelletjes was ik heel benieuwd naar de verschillende nieuwe edities van de brugklasboeken. Naast de 'gewone' wiskunde bevatten de nieuwe boeken ook vele andere activiteiten. 'Moderne Wiskunde - 7e editie', bijvoorbeeld, heeft in zijn brugklasdelen het zogenaamde 'Tussendoortje'. En mijn puzzelhart ging sneller kloppen toen ik de 12 pentomino's ontwaardde. De opdracht is om een rechthoek van 6 x 10 helemaal te vullen. Dit kan op 2339 manieren, afgezien van draaiingen of spiegelingen.

Er is echter één probleem: de puzzelstukjes zijn afgebeeld met een schaakbordkleuring. Ik wilde dus gráág een oplossing met zo'n schaakbordkleuring!
Dan moet je dus 30 zwarte vierkantjes en 30 witte vierkantjes hebben. Maar bekijk de 12 gegeven pentomino's eens nauwkeuriger: 28 zwarte en 32 witte vierkantjes! Helaas….

Gelukkig is er van de 12 gegeven puzzelstukjes nog wel een leuke recreatie-puzzel te maken: maak een 7 × 9 rechthoek in schaakbordkleuring met 3 zwarte gaten.
Er is geen oplossing met 3 inwendige gaten.
Ik geef u een oplossing met 2 inwendige gaten en een oplossing met 1 inwendig gat.
De puzzelstukjes mogen wel gedraaid worden, maar *niet* gespiegeld.

Probeert u nu eens een oplossing met schaakbordkleuring te vinden met 0 inwendige gaten, d.w.z. ALLE 3 (zwarte) gaten liggen aan de buitenkant.
(Met dank aan Jacques Haubrich voor de nodige ondersteuning.)

Als u binnen 1 maand een oplossing instuurt, dan ontvangt u 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd.

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Oplossing 687

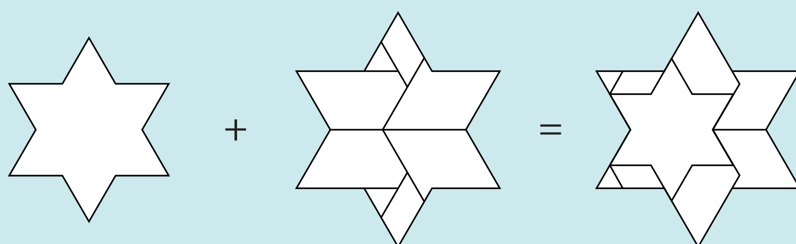
Recreatie

Steeds groter wordt mijn bewondering voor Greg N. Frederickson als de oplossingen van Recreatie 687 binnenstromen. Greg heeft een oplossing gevonden voor $3^2 + 4^2 = 5^2$ m.b.v. hexagrammen in slechts 9 stukken! Alleen de bezitters van zijn boek 'Dissections, Plane & Fancy' zonden zo'n minimale oplossing in. (Ter controle heb ik deze inzenders opgebeld.)

De Recreatie-lezers hadden slechts één maand de tijd, terwijl Greg al jaren verdeelpuzzels verzamelt. Daarom neemt uw puzzelredacteur eerbiedig zijn petje af voor inzenders, die slechts 11 of 12 stukjes nodig hadden. Deze verdienen met recht 5 punten voor de ladderwedstrijd. (Evenals de eerdergenoemde inzenders van Greg's oplossing.)
Inzenders met 13, 14 of 15 stukjes ontvangen 4 punten.
De rest ontvangt altijd nog 3 punten!

Hulde dus voor de inzenders, die slechts 11 stukjes nodig hadden:
Wobien Doyer (42 punten), Leiden en
Thijs Notenboom (25 punten), Utrecht.

Het kan dus écht, zonder te spiegelen, in slechts NEGEN stukjes.



Begrijpt u nú de waarde van dit fantastische boek?
Het is 310 bladzijden lang genieten.

Met 66 punten is winnaar van een boekenbon van *ƒ* 50,–:

Gustaaf Lahousse
St. Donatuslaan 4
B - 1850 Grimbergen

Heel hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in dit schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
5	18-02-99	07-01-99
6	01-04-99	18-02-99
7	17-05-99	01-04-99
8	24-06-99	13-05-99

Data nieuwe schooljaar
Wil eenieder die relevante data heeft voor het nieuwe schooljaar deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur: cph@xs4all.nl

---

5e Mathematische Modelleercompetitie Maastricht
za. 23 januari 1999
Universiteit Maastricht
tel.: 043-3883834
Zie ook artikel pag. 95

Nationale Onderwijs Tentoonstelling
di. 26 januari - za. 30 januari 1999
Jaarbeurs Utrecht
Methodekeuze exacte vakken:
26 januari 1999

Methodekeuze-bijeenkomsten
Data/plaatsen onder voorbehoud
Utrecht NOT:
di. 26 januari 1999
Enschede:
3 of 4 februari 1999
Sittard: 9 februari 1999
Berg op Zoom:
10 februari 1999
Sneek: 17 februari 1999
Alkmaar: 2 maart 1999

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 5 en za. 6 februari 1999
Freudenthal instituut:
030 2611 611

School en Computer 1999 Regionale ICT-onderwijs Dagen
17 maart Groningen, Martinihal
24 maart Eindhoven, Evoluon
31 maart Zwolle, IJsselhallen
7 april Amsterdam, RAI
14 april Nijmegen, Triavium
21 april Rotterdam, Erasmus Expo
Openingstijden:
12.00 - 17.00 u.
De toegang is gratis.
website: www.ess.nl
Zie aankondiging op pag. 135

Wat en waar is wiskunde III
Uitzenddata 1999:
1 woensdag 3 maart
9.30 uur
2 woensdag 10 maart
9.30 uur
3 woensdag 17 maart
9.30 uur
4 woensdag 24 maart
9.30 uur
Allemaal achtereen:
donderdag 25 maart
10.30 uur Duur: 80 minuten.
Zie ook artikel volgend nummer

Kangoeroe 1999
vrijdag 19 maart 1999
Jan Donkers
040-2472738
jand@win.tue.nl
Aankondiging volgt later

Wiskunde Olympiade 1999
Eerste ronde
vrijdag 9 april 1990
Fred Bosman
026-3521294
Fred.Bosman@cito.nl
Aankondiging volgt later

Examendata
vbo/mavo C/D:
di. 18 mei 1999
havo wiskunde A:
ma. 17 mei 1999
havo wiskunde B:
wo. 26 mei 1999
vwo wiskunde A:
do. 27 mei 1999
vwo wiskunde B:
do. 20 mei 1999

9th International Congress on Mathematical Education (ICME)
31/6/00 - 6/8/00
Tokyo, Japan
www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9/

Internetsites voor wiskundedocenten:

NVvW website
Bezoek regelmatig de website van de NVvW. Boordevol actuele informatie
www.euronet.nl/~nvvw

Ook voor leerlingen
Prachtige wiskunde op:
www-groups/dcs.stand.ac.uk/~history/index.html
Euclid's Elements:
aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html
Fractals
www.research.ibm.com/research/fractaltop.html

Niels Stensen College
Bezoek het wiskundelokaal van
www.nielsstensen.nl

Nationale Wiskunde Dagen 1999
www.fi.uu.nl/nwd

Wiskunde Olympiade
olympiads.win.tue.nl/nwo

Schoolnet België
www.digilife.be/schoolnet

School en Computer 1999
Regionale ICT-onderwijs Dagen
www.ess.nl

Suggesties voor interessante sites graag zenden aan
Kees Hoogland
e-mail: cph@xs4all.nl

Adv. Casio

herhalen uit
Euclides 74/2
pagina 51

Wolters-Noordhoff biedt u de keuze

Moderne wiskunde 7e editie
Netwerk 2e editie

Beschikbaar voor het schooljaar 1999/2000

Tweede Fase havo en vwo

	Moderne wiskunde 7e ed.	Netwerk 2e ed.	Domein
	Reeds verschenen:		
havo	A1 en B1 deel 1*	A1 en B1 deel 1*	Veranderingen, Tellen en Kansen
	A1 deel 2*	A1 deel 2*	Verbanden, Statistiek
	B1 deel 2*	B1 deel 2*	Toegepaste analyse 1, Ruimtemeetkunde 1
	A2	A2	Toegepaste analyse, Binomiale verdeling
	B1 deel 3	B1 deel 3	Kansrekening en statistiek
	B2 deel 1	B2 deel 1	Toegepaste analyse 2
	B2 deel 2		Ruimtemeetkunde 2
vwo	A1 en B1 deel 1*	A1 en B1 deel 1*	Functies en grafieken, Discrete analyse
	A1 en B1 deel 2	A1 en B1 deel 2	Combinatoriek en kansrekening
	A2 deel 1/B1 deel 3	A2 deel 1/B1 deel 3	Meetkunde
	Beschikbaar vóór schooljaar 1999-2000:		
havo		B2 deel 2	Ruimtemeetkunde 2
vwo	A1 deel 3	A1 deel 3	Grafen en matrices Stat. en kansrekening
	A2 deel 2		Differentiaalrek.
	B1 deel 4	B1 deel 4	Diff. en integraal rek. Goniom. functies
	B2 deel 1	B2	Voortg. Meetkunde

Basisvorming

Moderne wiskunde 7e ed.	Netwerk 2e ed.
Reeds verschenen:	
1a havo vwo*	1 havo vwo*
1b havo vwo*	
1a mavo havo (vwo)*	1 mavo havo (vwo)*
1b mavo havo (vwo)*	
1a vbo mavo*	1 vbo mavo*
1b vbo mavo*	
1a vbo	1 vbvo
1b vbo	
Beschikbaar vóór schooljaar 1999-2000:	
2a havo vwo	2 havo vwo
2b havo vwo	
2a mavo (havo)	2 mavo (havo)
2b mavo (havo)	
2a vbo mavo	2 vbo mavo
2b vbo mavo	
2a vbo	2 vbo
2b vbo	

*) U vindt deze delen in de beoordelingspakketten. Heeft u nog geen pakket aangevraagd? Neem dan contact op met onze voorlichter Elka van der Steeg. Bent u gebruiker van *Moderne wiskunde* 7e editie of *Netwerk* 2e editie? Dan kunt u gebruikersexemplaren van uw methode aanvragen van de delen die niet in het beoordelingspakket waren opgenomen: Elka van der Steeg, tel (050) 522 63 11, fax (050) 522 62 55, email: voorlichting.vo.exact@wolters.nl

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Wolters Noordhoff

419/9007